Reproduktionsmatrizen: Güter und Preise

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

21. Mai 2015

Vorbemerkungen

„Erinnern wir uns daran, dass alle Vermögensarten immer zu den jeweiligen Marktpreisen bewertet werden. Das [. . .] stellt die einzige Methode dar, mit der wir den nationalen Kapitalstock berechnen können: Andernfalls müsste man die landwirtschaftlichen Flächen (gemessen in Hektar), die Immobilien (gemessen in Quadratmetern) und die Hochöfen addieren.“ (T. Piketty, Das Kapital im 21. Jahrhundert, S. 198/99).

Kapitalumschlagzeiten

- Unterjähriger Umschlag und Profitrate
- Überjährige Umschlagzeiten und Buchwerte

Rolle von produktiven Infrastrukturen, Abschreibungen und Investitionen

Innere Wertrechnung und Wertrechnung als fraktale Kategorie

Grundgleichungen – Güterbilanz

Bezeichnungen: x^T – Produktionsziel, c^T – Konsumanteil, sind Spaltenvektoren, p – Preise usw. als Zeilenvektoren, $D = D(x) = D(x^T)$ ist die Diagonalmatrix, die aus dem Vektor x erzeugt werden kann ($D_{ii} = x_i$).

Bilanzmatrix $A = (a_{ik})$, wobei a_{ik} angibt, wieviel vom Gut i (gemessen in Einheiten E_i, etwa „Fahrzeuglaufleistung in km“) zur Produktion einer Einheit E_k des Guts k benötigt wird.

Make-Use-Matrix: Zur Produktion von x_i Einheiten vom Gut i muss ein Güterportfolio $(x_i \cdot a_{ik})_k$ eingesetzt werden: $A \cdot D(x^T)$.

Make (zeilenweise Güter-Sicht) und Use (spaltenweise Produktions-Sicht).

Produktionsvorrat (stock) $S = (s_{ik})$, wobei s_{ik} die Menge am Gut i in Einheiten E_i angibt, die für die Produktion von Gut k bevorratet werden.

Mit S wird ausschließlich der Bestand erfasst, der für den *operativen* Produktionsverbrauch erforderlich ist (zirkulierendes Kapital), nicht aber die Produktionsinfrastruktur, deren Buchwert als fixes Kapital M Teil der inneren Wertrechnung des jeweiligen Produzenten ist.

Das **Produktionsziel** in Gütereinheiten der jeweiligen Sorte wird durch die Diagonalmatrix $D(x^T)$ beschrieben, in deren Spalte k das Produktionsziel für Gut k steht, nämlich x_k Einheiten aus den dafür bevorrateten Ressourcen herzustellen.

Hier spielen keinerlei Eigentumstitel eine Rolle, S kann als $(n \times n)$-Hochregallager gedacht werden, in dessen *Spalte i* (Use) die Zutaten für die Produktionslinie i bevorratet werden.

Transformationsrechnung

Es wird synchrone Taktung des Netzes der produktiven Verflechtungen im Sinne der Theorie der Petrinetze unterstellt (Stellen $\to$ Produktionslinien, Transitionen $\to$ Handel).

Nach der Produktionsphase

$$S' = S^{(0)} + (E - A) \cdot D(x^T)$$

Nach der Handelsphase

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= S' + A \cdot D(x^T) - D(A \cdot x^T) - D(c^T) \\ &= S^{(0)} + D((E - A) \cdot x^T - c^T) \end{aligned}$$

$A \cdot D(x^T)$ vs. $D(A \cdot x^T)$: In Zeile i der Matrix $A \cdot D(x)$ steht, wie das neu produzierte Gut i auf die Produktionslinien zu verteilen ist, um deren Reserven aufzufüllen. Dabei verringert sich deren Bestand s_{ii} um die Größe $\Delta\, s_{ii} = \sum_k a_{ik} x_k$, was im Spaltenvektor $A \cdot x$ ausgedrückt werden kann, der zur Bilanzierung wieder zur Diagonalmatrix $D(A \cdot x)$ aufzublasen ist, um den Eintrag i dem Stock der Produktionslinie i zuzuordnen.

Einfache Reproduktion bedeutet dann $(E - A) \cdot x^T = c^T$, was zu $A x^T = x^T - c^T$ und schließlich zur **Stoffbilanzgleichung**

$$D(A x^T) = D(x^T) - D(c^T) \tag{B.1}$$

oder kumulativ

$$c^T = (E - A) \cdot x^T \tag{B.2}$$

umgeschrieben werden kann. Dieser fundamentale Zusammenhang bestimmt zugleich

$$x^T = (E - A)^{-1} \cdot c^T \tag{B.3}$$

als den Produktionsausstoß, der zur Befriedigung eines (quantitativ und sortenmäßig) bestimmten Konsumniveaus c erforderlich ist.

Arbeitsbilanz und Geldbilanz

Folgende Posten sind im Einzelnen zu berücksichtigen:

$p \cdot D(c^T)$	Einnahmen aus dem Verkauf an Konsumenten
$p \cdot D(A \cdot x^T)$	Einnahmen aus dem Verkauf an andere Produzenten
$-l$	Ausgaben für Lohnzahlung
$-p \cdot A \cdot D(x^T)$	Ausgaben für eigenen Einkauf.

Daraus ergibt sich der Zeilenvektor g als Gewinn der Produzenten

$$g = p \cdot (D(c^T) + D(A \cdot x^T) - A \cdot D(x^T)) - l$$

oder mit (B.2)

$$g + l = p \cdot (E - A) \cdot D(x^T)\,. \tag{W.2}$$

Weitere Annahme: Lohn l und Gewinn g sind proportional zum Produktionsausstoß. f ist hier zunächst eine skalare Größe.

Arbeitsaufwands-Normvektor	$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$
Lohnnormvektor	$v = f \cdot b = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$
Gewinnnormvektor	$m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{pmatrix}$

Es gilt also

$$l = v \cdot D(x^T) \text{ und } g = m \cdot D(x^T)$$

$$p \cdot (E - A) = v + m\,. \tag{W.3}$$

Der komponentenweise berechnete Quotient $\frac{m}{v}$ der beiden Vektoren ist genau die von Marx betrachtete (sektorenspezifische) Mehrwertrate.

Erste Verallgemeinerung

Für die Produktionen $1, \ldots, n$ sind m Arten von Lohnarbeiten erforderlich. Über die Arbeitsaufwendungen wird mit „Stundenzetteln“ Buch geführt, wobei jede Lohnarbeitsart i ihre eigenen Aufwandseinheiten AE_i verwendet, auf deren Basis der jeweilige Lohn gezahlt wird.

$B \cdot D(x^T)$ ist die $(m \times n)$-Matrix, in deren Zeile i der Arbeitsaufwand der Lohnarbeit i für die einzelnen Produktionen in AE_i notiert ist. Der m-reihige Spaltenvektor $y^T = B \cdot x^T$ enthält also den kumulierten Arbeitsaufwand, y_i gemessen in AE_i, welcher für die Produktion des Güterportfolios x^T insgesamt erforderlich ist.

Zur Transformation in Löhne ist die (produktionslogisch determinierte) Matrix B mit dem Zeilenvektor $f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{pmatrix}$ zu multiplizieren, wobei f_i (Einheit $\mathrm{GE}/\mathrm{AE}_i$) den Arbeitsaufwand von Lohnarbeit i in Löhne umrechnet.

Weiter mögen die Spaltenvektoren $c_1^T, \dots, c_m^T$ die konsumtiven Bedürfnisse der Lohnarbeiter – kumuliert nach einzelnen Lohnarbeiten – angeben, die in der $(n \times m)$-Matrix C mit

$$C \cdot D(y^T) = \begin{pmatrix} c_1^T & \dots & c_m^T \end{pmatrix}$$

zusammengefasst sind. Die Spalte i der Matrix C enthält also das konsumtive Bedarfsportfolio, welches mit einer Arbeitseinheit AE_i zu verbinden ist, und es gilt, summiert über alle Spalten, $c^T = C \cdot y^T$ für den konsumtiven Verbrauch.

$$w^T = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_m \end{pmatrix}^T = D(f) \cdot y^T = D(f) \cdot B \cdot x^T$$

ist der Spaltenvektor der an die einzelnen Lohnarbeiterfraktionen ausgezahlten Löhne, welche im Gleichgewicht genau das konsumtive Portfolio c^T auskaufen müssen.

Unterschied zum Lohnvektor $l = f \cdot B \cdot D(x^T)$, welcher die Lohnzahlungen aus der Sicht des Verdingenden darstellt, also

$$D(f) \cdot B \cdot D(x^T)$$

spaltenweise aufsummiert, während w^T die zeilenweisen Summen dieser Matrix und damit die Sicht der Verdingten enthält.

Der Lohn w_i muss den Konsum c_i^T genau auskaufen, also $w_i = p \cdot c_i^T$ gelten bzw. in Matrixschreibweise

$$w^T = D(f) \cdot y^T = \Big(p \cdot C \cdot D(y^T)\Big)^T . \tag{A.1}$$

Nach (W.3) gilt weiter

$$v = f \cdot B = p \cdot (E - A) . \tag{A.2}$$

Aus (A.2) kann $p = f \cdot B \cdot (E - A)^{-1}$ bestimmt und in (A.1) eingesetzt werden, woraus sich insgesamt die homogene m-reihige Matrixgleichung

$$\Big(D(f) \cdot y^T\Big)^T = f \cdot B \cdot (E - A)^{-1} \cdot C \cdot D(y^T)$$

als Bestimmungsgleichung für die Umrechnungsfaktoren f der Arbeitsaufwendungen in Löhne herleiten lässt.

Zusammenfassen der Teilmatrizen zu einer Gesamtmatrix

Produktionslogik $A \cdot D(x^T)$, Bedürfnislogik $C \cdot D(y^T)$ und Arbeitsaufwandslogik $B \cdot D(x^T)$ lassen sich zu einer Matrixgleichung zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} A \cdot D(x^T) & C \cdot D(y^T) \\ B \cdot D(x^T) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D(x^T) & 0 \\ 0 & D(y^T) \end{pmatrix},$$

mit der *erweiterten Bilanzmatrix*

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich unsere früheren Gleichungen konsistent in der Form der folgenden beiden Bilanzgleichungen anschreiben

Die *Produktionsbilanzgleichung*

$$\begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} = \mathcal{U} \cdot \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Die *Lohnbilanzgleichung*

$$\begin{pmatrix} p & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & f \end{pmatrix} \cdot \mathcal{U} \,. \tag{A.4}$$

Aus (A.3) und (A.4) lassen sich die Beziehungen

$$p = p\,(A + C\,B) \text{ und } x^T = (A + C\,B)\,x^T \qquad \text{(A.5)}$$

für das Produktionsziel x^T und den Preisvektor p einer einfachen Reproduktion herleiten. Der Matrix

$$U = (A + C\,B)$$

kommt also möglicherweise eine zentralere Rolle zu als der Matrix A.

Die Beziehungen im einzelnen

$y^T = B \cdot x^T$	Arbeitsaufwand und Produktionsausstoß
$f = p \cdot C$	Arbeitswertfaktoren, Preise und Konsummatrix
$c^T = C \cdot y^T$	Konsumgüter der Lohnarbeiter kumuliert
$w^T = D(f) \cdot y^T$	Lohn nach Lohnarbeitsarten
$w = f \cdot D(y^T)$	Dasselbe als Zeilenvektor
$l = f \cdot B \cdot D(x^T)$	Lohn nach Produktarten
$D(f) \cdot B \cdot D(x^T)$	Lohn nach Produkt- und Arbeitsarten
$v = f \cdot B$	Lohnnormvektor als gewichtete Summe der Arbeitsaufwendungen

Diese Bilanzen sind *rein produktionslogischer Natur*, unabhängig von Eigentumsverhältnissen und damit sowohl für innerbetriebliche als auch für volkswirtschaftliche Verflechtungsbilanzen gültig.

Wertrechnung unternehmerischer Tätigkeit

Für die Produktionen $1, \dots, n$ sind s Arten produktiver Infrastrukturen erforderlich. Über deren Verschleiß wird mit „Verschleißzetteln“ Buch geführt, wobei jede Art von Infrastruktur i eigene Einheiten VE_i verwendet, auf deren Basis der jeweilige (standardisierte !) Verschleiß erfasst wird, der durch Zukauf entsprechender Investitionsgüter ausgeglichen werden muss.

Wir setzen voraus, dass der Verschleiß proportional zum Produktionsausstoß ist und können damit ähnlich wie für die Löhne argumentieren:

$B' \cdot D(x^T)$ ist die $(s \times n)$-Matrix, in deren Zeile i der Verschleiß der Infrastrukturart i in VE_i notiert ist. Der s-reihige Spaltenvektor $z^T = B' \cdot x^T$ enthält also den kumulierten Verschleiß, z_i gemessen in VE_i, der Infrastrukturart i, welcher bei der Produktion des Güterportfolios x^T insgesamt zu ersetzen ist.

Zur Transformation in XXe ist die (produktionslogisch determinierte) Matrix B' mit dem Zeilenvektor $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix}$ zu multiplizieren, wobei r_i (Einheit $\mathrm{GE}/\mathrm{VE}_i$) die Verschleißeinheiten der Infrastrukturart i in Geld umrechnet.

Weiter mögen die Spaltenvektoren $d_1^T, \dots, d_s^T$ den Bedarf an *produktiver Konsumtion*, also nach Ersatz verschlissener Investitionsgüter – kumuliert nach einzelnen Infrastrukturarten – angeben, die in der $(n \times s)$-Matrix C' mit

$$C' \cdot D(z^T) = \begin{pmatrix} d_1^T & \dots & d_s^T \end{pmatrix}$$

zusammengefasst sind. Die Spalte i der Matrix C' enthält also das Bedarfsportfolio *produktiver Konsumtion*, welches mit einer Verschleißeinheit VE_i zu verbinden ist, und es gilt, summiert über alle Spalten, $d^T = C' \cdot z^T$ für den konsumtiven Verbrauch.

$$q^T = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_s \end{pmatrix}^T = D(r) \cdot z^T = D(r) \cdot B' \cdot x^T$$

ist der Spaltenvektor der an die Betreiber der Infrastruktur ausgezahlten XXe, welche im Gleichgewicht genau das Bedarfsportfolio produktiver Konsumtion d^T auskaufen müssen.

q^T enthält wieder die zeilenweisen Summen der Matrix

$$D(r) \cdot B' \cdot D(x^T),$$

deren spaltenweise Summe der „Unternehmer-Lohnvektor“ $l = r \cdot B' \cdot D(x^T)$ ist.

Was also sind die XXe?

Zusammenfassen der Teilmatrizen zu einer Gesamtmatrix

Produktionslogik $A \cdot D(x^T)$, Lohnarbeiter-Bedürfnislogik $C \cdot D(y^T)$, produktive Konsumtion $C' \cdot D(z^T)$, Arbeitsaufwandslogik $B \cdot D(x^T)$ und Infrastrukturersatzlogik $B' \cdot D(x^T)$ lassen sich zu einer Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} A \cdot D(x^T) & C \cdot D(y^T) & C' \cdot D(z^T) \\ B \cdot D(x^T) & 0 & 0 \\ B' \cdot D(x^T) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & C & C' \\ B & 0 & 0 \\ B' & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D(x^T) & 0 & 0 \\ 0 & D(y^T) & 0 \\ 0 & 0 & D(z^T) \end{pmatrix}$$

zusammenfassen mit der *erweiterten Bilanzmatrix*

$$\mathcal{U}' = \begin{pmatrix} A & C & C' \\ B & 0 & 0 \\ B' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich die Bedingungsgleichungen der einfachen Reproduktion einer *standardisierten industriellen Großproduktion*, in der Arbeitsaufwand und Verschleißersatz proportional zum Produktionsausstoß sind, konsistent in der Form von zwei Matrix-Bilanzgleichungen anschreiben, welche die Seite der Herstellung der Gebrauchswerte und die Seite der finanziellen Verflechtungen miteinander koppeln.

Die *Produktionsbilanzgleichung*

$$\begin{pmatrix} x^T \\ y^T \\ z^T \end{pmatrix} = \mathcal{U}' \cdot \begin{pmatrix} x^T \\ y^T \\ z^T \end{pmatrix} \tag{A.3'}$$

Die *Geldbilanzgleichung*

$$\begin{pmatrix} p & f & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & f & r \end{pmatrix} \cdot \mathcal{U}' \,. \tag{A.4'}$$

Aus (A.3') und (A.4') lassen sich die Beziehungen

$$p = p\,(A + C\,B + C'\,B') \text{ und } x^T = (A + C\,B + C'\,B')\,x^T \quad \text{(A.5')}$$

für das Produktionsziel x^T und den Preisvektor p einer einfachen Reproduktion herleiten.

Dies ist die Essenz der „Schrödingergleichung der Volkswirtschaftslehre“

$$p = c + v + m\,.$$