Reguläre Polyeder

Vortrag von
Dr. Hans-Gert Gräbe,
apl. Professor für Informatik, Univ. Leipzig,
und Leipziger Schülergesellschaft
für Mathematik (LSGM) e.V.

im Wissenschaftssommer
Leipzig, 1. Juli 2008

http://www.hg-graebe.de/MV

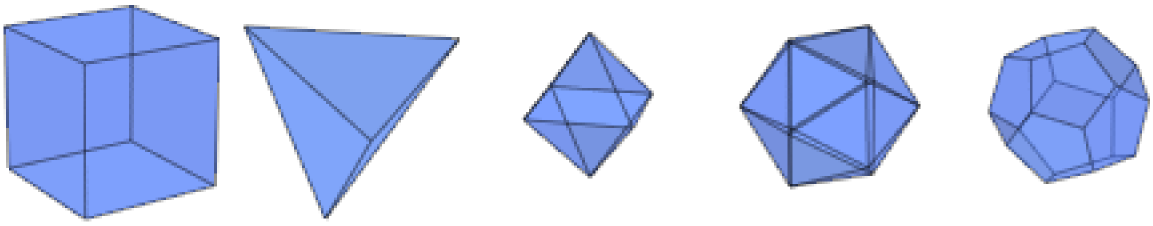
```
export(plot):
Warning: 'Sum' already has a value, not exported.

Warning: protected variable Sequence overwritten

Warning: protected variable Integral overwritten
Warning: 'hull' already has a value, not exported.
```

Die fünf Platonischen Körper

Wie sehen diese Körper aus?

MuPAD hat eigene Funktionen, um grafische Darstellungen der bekannten Platonischen Körper zu erzeugen.

```
plot(Canvas(Layout=Horizontal,Width=16*unit::cm,
map([Hexahedron, Tetrahedron, Octahedron, Icosahedron, Dodecahedron]
u -> Scene3d(u(FillColorFunction = RGB::LightBlue.[0.4]),Axes = None
```



Als Platonische Körper bezeichnet man diejenigen (konvexen) Polyeder, welche "am symmetrischsten" sind.

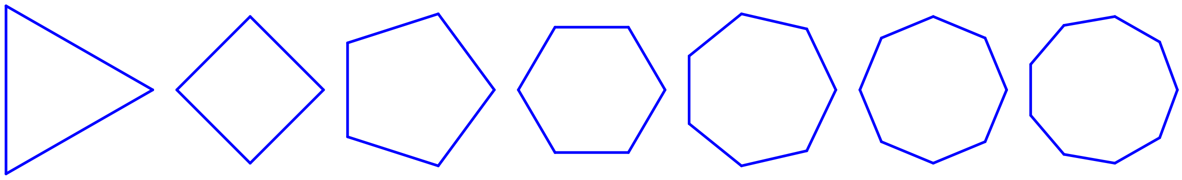
Charakterisierende Eigenschaften:
Jeder dieser Körper

- o sieht an jeder Ecke "gleich aus",
- o sieht an jeder Kante "gleich aus",
- o sieht an jeder Seitenfläche "gleich aus".

Frage: Gibt es weitere solche Körper? Wie können wir unsere Vermutung beweisen? Dazu müssen wir wissen, was genau mit "sieht gleich aus" gemeint ist.

Zwischenfrage: Welche regulären Figuren gibt es in der Ebene?

```
plot(Canvas(Layout=Horizontal,Width=16*unit::cm,
Scene2d(Polygon2d([[cos(2*PI*k/n), sin(2*PI*k/n)] $ k = 0..n]))$n=3.
Axes=None,Scaling=Constrained))
```



Antwort: In der Ebene gibt es unendlich viele reguläre Polygone.

Genauer stellen wir fest, dass es für jedes $n \geqslant 3$ bis auf Ähnlichkeit genau ein reguläres Polygon gibt.

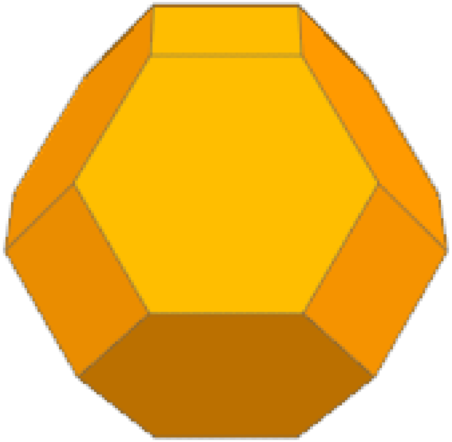
Die Eulersche Polyederformel

Wir bestimmen für jeden der Platonischen Körper die Anzahl e der Ecken, k der Kanten, f der Seitenflächen

In jedem der Fälle gilt ...

Weitere Beispiele

```
plot(plot::Waterman(4.5),Axes=None)
```



Satz (Eulersche Polyederformel):
Für jedes konvexe Polyeder gilt *e-k+f=2.*

Für ebene Polygone gilt übrigens *e=k* oder *e-k=0*.

Beweis der Eulerschen Polyederformel durch Abwickeln in die Ebene.
Das Invarianzprinzip in der Mathematik.

Beweis, dass es nur fünf Platonische Körper gibt

Reguläre Polyeder aus Dreiecken, *m* Kanten stoßen in einer Ecke zusammen:

```
u:=subs(e-k+f=2,f=2/3*k, e=2/m*k);
solve(u,k,IgnoreSpecialCases);
```

$$\frac{2 \cdot k}{m} - \frac{k}{3} = 2$$

$$\left\{ -\frac{6 \cdot m}{m - 6} \right\}$$

Für verschiedene Werte von *m* erhalten wir folgende Lösungen

```
[m,6*m/(6-m)]$m=3..5;
```

$[3, 6], [4, 12], [5, 30]$

Allgemein: Reguläre Polyeder aus *p*-Ecken, *m* Kanten stoßen in einer Ecke zusammen

```
u:=subs(e-k+f=2,f=2/p*k, e=2/m*k);
```

```
u:=subs(e-k+f=2,f=2/p*k, e=2/m*k);
sol:=solve(u,k,IgnoreSpecialCases);
```

$$\frac{2 \cdot k}{m} - k + \frac{2 \cdot k}{p} = 2$$

$$\left\{\frac{2}{\frac{2}{m} + \frac{2}{p} - 1}\right\}$$

Es muss zunächst einmal $\frac{2}{m} + \frac{2}{p} - 1$ positiv sein. *p=3* haben wir betrachtet, bleibt *p=4* und *p=5*. Es ist jeweils nur *m=3* möglich.

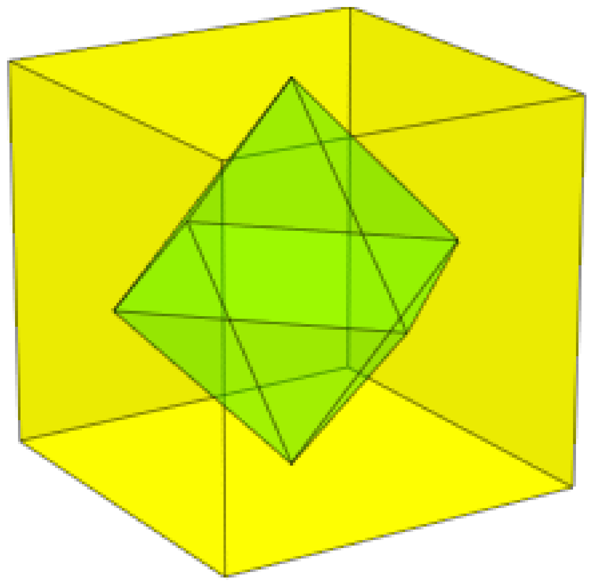
m	p	e	k	f	Bezeichnung des Polyeders
3	3	4	6	4	Tetraeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder
3	4	8	12	6	Hexaeder (Würfel)
3	5	20	30	12	Dodekaeder

Platonische Körper und Dualität

Gibt es für die Symmetrie der Werte für e, k, f in der Tabelle zwischen Oktaeder und Hexaeder bzw. Dodekaeder und Ikosaeder einen tiefer liegenden Grund?

Würfel und Oktaeder

```
plot(Hexahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.9]),
     Octahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.2]), Axes = None)
```

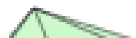



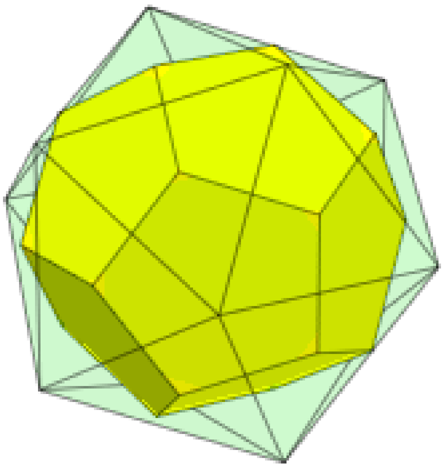
Würfel und Oktaeder sind zueinander dual - die Seitenmitten eines Würfels spannen ein Oktaeder auf und die Seitenmitten eines Oktaeders spannen einen Würfel auf.

Umkugel des Oktaeders und Inkugel des Würfels fallen zusammen. Wie ist das Verhältnis der Radien beider Kugeln? Antwort: $\sqrt{3}$

Dodekaeder und Ikosaeder

```
plot(Dodecahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow),
     Rotate3d(PI/2,[0,0,0],[0,0,1],Scale3d([1.12$3],
         Icosahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.1]))),
     Axes = None)
```



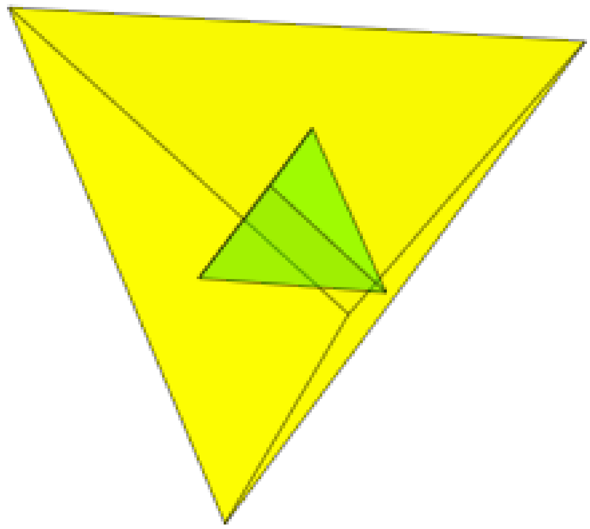
Dodekaeder und Ikosaeder sind zueinander dual - die Seitenmitten eines Dodekaeders spannen ein Ikosaeder auf und die Seitenmitten eines Ikosaeders spannen ein Dodekaeder auf.

Auch hier fallen Umkugel des Dodekaeders und Inkugel des Ikosaeders zusammen. Aber wie groß ist das Verhältnis der Radien? Idee: Ikosaeder zerfällt in 20 dreiseitige Pyramiden mit Spitze im Zentrum. Wir können die Länge der Grundkante, der Seitenkante (=Radius Umkugel) und der Höhe auf die Grundfläche (=Radius Inkugel) einer solchen Pyramide berechnen.

Oder im Hilfesystem unter **Dodekaeder** nachschauen (Tabelle ganz am Ende der Hilfeseite).

Tetraeder und ?

```
plot(Tetrahedron(FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.9]),
     plot::Scale3d([-1/3$3],
          Tetrahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.2])),
     Axes = None)
```



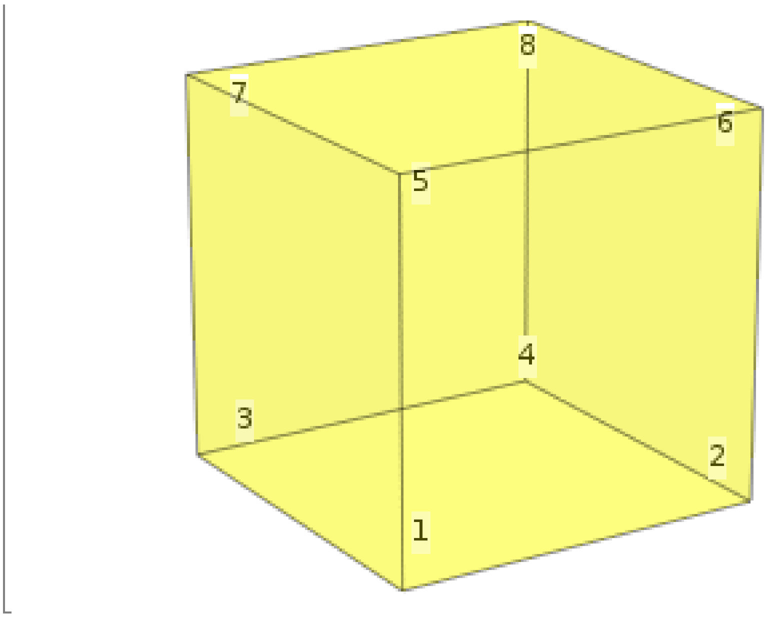
Das Tetraeder ist zu sich selbst dual - die Seitenmitten eines Tetraeders spannen wieder ein Tetraeder auf.

Auftrag: Untersuche, um welchen Faktor das innere Tetraeder kleiner ist? Beide befinden sich in Ähnlichkeitslage, Streckungszentrum ist der Mittelpunkt. Vergleiche mit der ebenen Situation!

Die Drehgruppe eines regulären Polyeders
Beispiel Würfel

Welche Bewegungen existieren, die einen Würfel in sich selbst überführen?

```
l:=[map([i,j,k],u->1.7*(u-0.5))$i=0..1$j=0..1$k=0..1]:
txt:=[plot::Text3d("".i,l[i])$i=1..8]:
plot(txt,Hexahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.3]),Axes=Non
```



Welche Bewegungen fallen uns ein?

Wie kann man die Anzahl bestimmen, um zu wissen, dass keine vergessen wurden?

Bewegungen kann man nacheinander ausführen? Was kommt dabei heraus?
Verfolge an den Eckennummern, was passiert!

Folgerungen:
(1) Wenn man zwei Bewegungen nacheinander ausführt, so erhält man wieder eine Bewegung.
Die Würfelsymmetrie-Bewegungen bilden eine **Gruppe** mit 24 Elementen.
(2) Jede Würfelsymmetrie-Bewegung kann an Hand der Vertauschung der Eckennummern eindeutig identifiziert werden, aber nicht jede solche Vertauschung entspricht einer Würfelsymmetrie-Bewegung.

Auftrag: Nummeriere die vier Raumdiagonalen mit 1..4 und untersuche, welche Vertauschungen der Zahlen 1..4 durch die 24 Würfelsymmetrie-Bewegungen

Reguläre Polytope in höheren Dimensionen

Es gibt drei Serien, von denen Exemplare in jeder Dimension existieren.

Würfel H_3 -> Hyperwürfel H_n

Eckpunkte mit den Koordinaten $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, $e_i \in \{-1, 1\}$.

Realisierung durch Verbinden homologer Ecken zweier H_{n-1} als Grund- und Deckfläche.

Realisierung durch Verbinden homologer Ecken zweier H_{n-1} als Grund- und Deckfläche. Siehe das zweidimensionale Schrägbild eines dreidimensionalen Würfels in dieser Präsentation.

Auftrag: Finde heraus, an welchem Stand in der Zeltstadt ein dreidimensionales Schrägbild eines vierdimensionalen Würfels ausgestellt ist?

Rekursionsformel für die Seitenanzahlen: $f_i^{(n)}=2*f_i^{(n-1)}+f_{i-1}^{(n-1)}$

Kann man ganz einfach implementieren, wenn man die genaue Abbruchbedingung einbaut:

```
f:=proc(i,n)
begin
  if n=1 then // eindimensionaler Würfel
    if i=0 then 2      // zwei Ecken
    elif i=1 then 1    // eine Kante
    else 0             // und sonst nix
    end_if
  else 2*f(i,n-1)+f(i-1,n-1);
  end_if
end_proc;
```

proc f(i, n) ... end

Probieren wir doch gleich mal aus, ob wir die richtigen Zahlen berechnet bekommen!

```
[f(i,n)$i=0..n-1]$n=2..5
```

[4, 4], [8, 12, 6], [16, 32, 24, 8], [32, 80, 80, 40, 10]

Auftrag: Finde eine explizite Formel für die Anzahl der i-dimensionalen Seiten eines H_n.

Oktaeder O_3 -> Kreuzpolytop O_n

Realisierung als konvexe Hülle der Einheitspunkte $+e_i$, $-e_i$, i=1,..,n, auf den Koordinatenachsen. Dual zum Hyperwürfel.

Tetraeder S_3 -> Simplex S_n

Die konvexe Hülle von *n+1* paarweise gleichweit entfernten Punkten. Einfache Realisierung als Hyperebene im (n+1)-dimensionalen Raum durch die Eckpunkte e_1, e_2, ..., e_{n+1}. Zu sich selbst dual.

Das ist schon alles in Dimension n, $5 \leq n$.

Ausnahmen gibt es nur in Dimension 3 und 4:

Dimension 3: Dodekaeder und Ikosaeder (zueinander dual)

Dimension 4:
120-Zell mit 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 Flächen und 120 Dodekaedern als Zellen und
600-Zell mit 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 Flächen und 600 Tetraedern als Zellen (sind zueinander dual)

sowie

das 24-Zell mit 24 Ecken, 96 Kanten, 96 Flächen und 24 Oktaedern als Zellen.