Gleichungen und Ungleichungen

Solve und Reduce

Lineare und algebraische Gleichungen

```
ClearAll["Global`*"]
```

Die Menge der Variablen muss nicht unbedingt angegeben werden, wenn klar ist, dass nach allen Variablen aufgelöst werden soll.

```
Solve[x^2 + 3 x + 2 == 0]
```

$\{\{x \to -2\}, \{x \to -1\}\}$

```
Solve[{2 x + 3 y == 5, 3 x + 4 y == 11}]
```

$\{\{x \to 13, y \to -7\}\}$

Enthält ein Ausdruck überzählige Variablen, die als Parameter betrachtet werden sollen, dann ist das zweite Argument erforderlich. Je nachdem, welche Variable als Parameter gesetzt wird, ergeben sich unterschiedliche Lösungen (es sind ja auch unterschiedliche Aufgaben).

```
Solve[x^2 + 6 y == 1, x]
```

$\left\{\left\{x \to -\sqrt{1-6y}\right\}, \left\{x \to \sqrt{1-6y}\right\}\right\}$

```
Solve[x^2 + 6 y == 1, y]
```

$\left\{\left\{y \to \frac{1}{6}\left(1-x^2\right)\right\}\right\}$

Lässt man das zweite Argument weg, so ist das Ergebnis dasselbe wie in der Notation, wo alle Variablen als zweites Argument angegeben werden. In diesem Fall entscheidet *Mathematica* selbst, welche Variablen als Parameter betrachtet werden. Der Nutzer hat auf diese Auswahl keinen Einfluss. Insbesondere zeigt dieses Beispiel, dass die Reihenfolge der Variablen auf diese Auswahl keinen Einfluss hat.

```
Solve[x^2 + 6 y == 1]
```

```
Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

$\left\{\left\{y \to \frac{1}{6}\left(1-x^2\right)\right\}\right\}$

```
Solve[x^2 + 6 y == 1, {x, y}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\left\{\left\{y \to \frac{1}{6}\left(1 - x^2\right)\right\}\right\}$

```
Solve[x^2 + 6 y == 1, {y, x}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\left\{\left\{y \to \frac{1}{6}\left(1 - x^2\right)\right\}\right\}$

Beachten Sie, dass für einen Parameter *y* die Lösungen über dem Körper *Q(y)* bestimmt werden. Dabei können Lösungen, die nur für spezielle *y*−Werte existieren, unter den Tisch fallen.

Die Warnung, dass nicht alle Lösungen gefunden wurden, ist also ernst zu nehmen. Sie bedeutet allerdings nicht, dass *Mathematica* falsch rechnet (das tut es beim Gleichungslösen gelegentlich auch), sondern dass es zwei Interpretationen der Aufgabenstellung *Solve* gibt und Sie vielleicht gerade die andere meinen.

Der Unterschied wird am folgenden einfachen Beispiel bereits deutlich.

```
Solve[a x - b == 0, x]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{b}{a}\right\}\right\}$

Mathematica findet die allgemeine Lösung, d.h. die Lösung im Körper Q(a,b), diesmal sogar ohne Warnungen.
Dass es noch eine Lösung *x − beliebig* für die speziellen Parameterwerte a == b == 0gibt bleibt dabei außer Betracht.
Eine vollständige Übersicht über alle Lösungen, auch für spezielle Parameterwerte, produziert das Kommando **Reduce**.

```
u = Reduce[a x - b == 0, x]
```

$(b == 0 \,\&\&\, a == 0) \;||\; \left(a \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{b}{a}\right)$

```
Solve[u, x]
```

{{}}

```
Solve[a x - b == 0, {a, b, x}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\{\{b \to a\, x\}\}$

Sie können im **Solve**−Kommando ein drittes Argument angeben, um Abhängigkeiten explizit zu eliminieren. Das Ergebnis ist dasselbe wie bei einem herkömmlichen **Solve**−Aufruf mit dem Ergebnis einer Eliminationsaufgabe.

```
Solve[{x + y == 1, x - y == 2}, x, y]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

```
u = Eliminate[{x + y == 1, x - y == 2}, y]
Solve[u, x]
```

$2\,x == 3$

$$\left\{\left\{x \to \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

In *Mathematica* müssen Gleichungen als Gleichungen angeschrieben werden. Eine Liste von Polynomen wird nicht akzeptiert − die aus anderen CAS bekannte Interpretation als Aufgabe zur Nullstellenbestimmung muss explizit angeschrieben werden.

```
sys = {x^2 + y - 2, 3 x - y^2 - 2};
sol = Solve[sys, {x, y}]
```

Solve::eqf : $-2 + 3\,x - y^2$ is not a well−formed equation.

Solve::eqf : $-2 + 3\,x - y^2$ is not a well−formed equation.

$\text{Solve}\left[\left\{-2 + x^2 + y,\ -2 + 3\,x - y^2\right\},\ \{x, y\}\right]$

```
sol = Solve[sys == 0, {x, y}]
```

$$\left\{\{x \to 1,\ y \to 1\},\ \{x \to 2,\ y \to -2\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(1 - 3\,i\sqrt{3}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(1 + 3\,i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

```
sys = {2 x + 3 y + z == 1, x - y - z == 4, 3 x + 7 z == 5};
```

```
sol = Solve[sys]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{101}{41},\ y \to -\frac{49}{41},\ z \to -\frac{14}{41}\right\}\right\}$$

```
{x, y, z} /. sol[[1]]
```

$$\left\{\frac{101}{41},\ -\frac{49}{41},\ -\frac{14}{41}\right\}$$

$$\text{mat} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix};\ x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix};$$

Aus dieser komplexeren Notation lassen sich die Zutaten für das **Solve**−Kommando wie folgt extrahieren:

```
vars = Flatten[x]
sol = Solve[mat.x == b]
```

{x1, x2, x3}

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{101}{41},\ x2 \to -\frac{49}{41},\ x3 \to -\frac{14}{41}\right\}\right\}$$

Die Antwort wird wieder als Substitutionsliste gegeben, woraus sich die Lösung in Matrixnotation wie folgt gewinnen lässt. Auch die Probe lässt sich leicht ausführen.

```
MatrixForm /@ (x /. sol)
```

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{101}{41} \\ -\frac{49}{41} \\ -\frac{14}{41} \end{pmatrix}\right\}$$

```
(mat.x == b) /. sol
```

{True}

```
MatrixForm /@ ((mat.x - b) /. sol)
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Transzendente Gleichungen

```
ClearAll["Global`*"]
```

Solve verwendet beim Lösen transzendenter Gleichungen intern den Mechanismus der **InverseFunction**. Da die meisten transzendenten Funktionen keine Inverse über dem ganzen Definitionsbereich besitzen, ist das Ergebnis von beschränkter Aussagekraft. Meist wird nur eine Lösung, der Hauptwert, angegeben.
Mit dem folgenden Ergebnis würden Sie im Abitur sicher nur mittelmäßig abschneiden.

$$\text{Solve}\left[\text{Sin}[x] == \frac{1}{2},\ x\right]$$

```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{\pi}{6}\right\}\right\}$$

Das Kommando **Reduce** hilft weiter. Die Verbindung zu **Solve** müssen Sie aber selbst herstellen.

```
sol = Reduce[Sin[x] == 1/2, x]
```

$C[1] \in \text{Integers}\ \&\&\ \left(x == \frac{\pi}{6} + 2\pi C[1] \;||\; x == \frac{5\pi}{6} + 2\pi C[1]\right)$

Es ist auch deutlich besser mit Zusatzinformationen konditionierbar als **Solve**.

```
u = Reduce[Sin[x] == 1/2 && -5 < x < 5, x]
```

$x == -\frac{7\pi}{6} \;||\; x == \frac{\pi}{6} \;||\; x == \frac{5\pi}{6}$

```
Solve[u, x]
```

$\left\{\left\{x \to -\frac{7\pi}{6}\right\}, \left\{x \to \frac{\pi}{6}\right\}, \left\{x \to \frac{5\pi}{6}\right\}\right\}$

```
Solve[Sin[x] == 1/2 && -5 < x < 5, x]
```

```
Solve::eqf : x < 5 is not a well-formed equation.
Solve::eqf : x < 5 is not a well-formed equation.
```

$\text{Solve}\left[\text{Sin}[x] == \frac{1}{2}\ \&\&\ -5 < x < 5, x\right]$

```
u = Reduce[sol && -5 < x < 5, x]
```

$\left(C[1] == 0\ \&\&\ x == \frac{\pi}{6}\right) \;||\; \left(\left(C[1] == -1 \;||\; C[1] == 0\right)\ \&\&\ x == \frac{1}{6}\left(5\pi + 12\pi C[1]\right)\right)$

```
v = {u // ToRules}
```

$\left\{\left\{C[1] \to 0, x \to \frac{\pi}{6}\right\}, \left\{C[1] \to -1, x \to \frac{1}{6}\left(5\pi + 12\pi C[1]\right)\right\}, \left\{C[1] \to 0, x \to \frac{1}{6}\left(5\pi + 12\pi C[1]\right)\right\}\right\}$

```
x //. v
```

$\left\{\frac{\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Beispiel: Eine Exponentialgleichung

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
Solve[a^x + a^(2 x) == 1, x]
```

Solve::ifun :
Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

$$\left\{\left\{x \to \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right\}, \left\{x \to \frac{i\pi + \text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right\}\right\}$$

```
Messages[Solve]
Off[Solve::"ifun"];
```

{HoldPattern[Solve::eqf] :→ ‘1‘ is not a well-formed equation.,
HoldPattern[Solve::ifun] :→
Inverse functions are being used by ‘1‘, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information., HoldPattern[Solve::ifun2] :→
Cannot obtain a solution with the InverseFunctions -> False option setting.,
HoldPattern[Solve::svars] :→
Equations may not give solutions for all "solve" variables.}

```
sol = Solve[u + u^2 == 1, u]
```

$$\left\{\left\{u \to \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{u \to \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

```
Solve[a^x == u, x] /. sol[[2]]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right\}\right\}$$

```
Reduce[a^x + a^(2 x) == 1, x]
```

$$C[1] \in \text{Integers} \,\&\&\, a \neq 0 \,\&\&\, \text{Log}[a] \neq 0 \,\&\& \left(x == \frac{i\pi + 2 i\pi C[1] + \text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]} \,||\, x == \frac{2 i\pi C[1] + \text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right)$$

```
rsol = Reduce[a^x + a^(2 x) == 1 && a > 0, x, Reals]
```

$$\text{Log}[a] \neq 0 \,\&\&\, a > 0 \,\&\&\, x == \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}$$

```
rsol[[3]] // ToRules
```

$$\left\{x \to \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right\}$$

```
Solve[rsol[[3]], x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{\text{Log}\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right]}{\text{Log}[a]}\right\}\right\}$$

Bei transzendenten Gleichungen ist die explizite Angabe der Variablen, nach der aufgelöst werden soll, oftmals erforderlich, um Fehlinterpertationen der

Gleichung durch *Mathematica* zu vermeiden.

$$\texttt{eq} = \texttt{Sin}[x] + \texttt{Cos}[x] == \frac{1}{\sqrt{2}};\ \texttt{Solve}[\texttt{eq}]$$

```
Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

$$\left\{\left\{\texttt{Cos}[x] \to \frac{1}{\sqrt{2}} - \texttt{Sin}[x]\right\}\right\}$$

So findet *Mathematica* die (wichtigsten der) Lösungen.

```
sol1 = Solve[eq, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \texttt{ArcCos}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)\right]\right\}, \left\{x \to -\texttt{ArcCos}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\right]\right\}\right\}$$

Reduce findet die gesamte Lösungsmenge und durch zusätzliche Beschränkung auf ein Intervall lassen sich auch einzelne Lösungen isolieren.

```
Reduce[eq, x]
```

$$C[1] \in \texttt{Integers}\ \&\&\ \left(x == 2\,\texttt{ArcTan}\left[\frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}\right] + 2\pi C[1]\ ||\ x == 2\,\texttt{ArcTan}\left[\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}\right] + 2\pi C[1]\right)$$

```
sol2 = Reduce[eq && 0 < x < 2, x] // Simplify // ToRules
```

$$\left\{x \to 2\,\texttt{ArcTan}\left[\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}\right]\right\}$$

Und hier die Probe mit beiden Lösungen. **Simplify** hat sowohl Schwierigkeiten, unterschiedliche Wurzelausdrücke als gleichwertig zu erkennen, als auch Ausdrücke mit trigonometrischen und Arcusfunktionen zu analysieren. **FullSimplify** schafft es in allen (diesen) Fällen.

```
eq /. sol1 // Simplify
% // FullSimplify
```

$$\left\{2\sqrt{2+\sqrt{3}} == \sqrt{2} + \sqrt{6},\ \texttt{True}\right\}$$

```
{True, True}
```

```
eq /. sol2 // FullSimplify
```

```
True
```

```
(x /. sol1[[1]]) == (x /. sol2)
% // FullSimplify
```

$$\text{ArcCos}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\right] == 2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}\right]$$

```
True
```

Diese Lösung gibt *Maple* als Antwort. Auch deren Gleichwertigkeit findet **FullSimplify** heraus. Beachten Sie, dass Klammern gesetzt werden müssen, da die Bindungskraft des Infixoperators == höher ist als der von /. . Ohne Klammern würde die zweite Zeile als **x /. (sol1[[2]] == x) /. sol3** gründlich missverstanden.

$$\textbf{sol3} = \textbf{x} \to -\textbf{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right]$$

```
(x /. sol1[[2]]) == (x /. sol3)
% // FullSimplify
```

$$x \to -\text{ArcTan}\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right]$$

$$-\text{ArcCos}\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right] == -\text{ArcTan}\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right]$$

```
True
```

Und hier noch einige Beispiele.
Transzendente Gleichungen sehr unterschiedlicher Struktur können gelöst werden.

$$\textbf{Solve}\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} == a,\ x\right]$$

$$\left\{\left\{x \to \frac{4+a^4}{4\,a^2}\right\}\right\}$$

Diese Wurzelgleichung ist äquivalent zu einer Eliminationsaufgabe mit folgendem System

$$\textbf{Solve}\left[\left\{x+1 == y^2,\ x-1 == z^2,\ y+z == a\right\},\ x,\ \{y,\ z\}\right]$$

$$\left\{\left\{x \to \frac{4+a^4}{4\,a^2}\right\}\right\}$$

und dieses wiederum zu diesem **Eliminate**−Kommando

```
Eliminate[{x + 1 == y^2, x - 1 == z^2, y + z == a}, {y, z}]
Solve[%, x]
```

$a^4 - 4 a^2 x == -4$

$\left\{\left\{x \to \frac{4 + a^4}{4 a^2}\right\}\right\}$

Ein weiteres Beispiel.

```
Solve[2 Log[x + 1] - Log[x - 1] == 3, x]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(-2 + e^3 - \sqrt{-8 e^3 + e^6}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-2 + e^3 + \sqrt{-8 e^3 + e^6}\right)\right\}\right\}$

```
% // N
```

```
{{x → 1.25264}, {x → 16.8329}}
```

Diese Gleichung lässt sich auf eine algebraische zurückführen.

```
Solve[(x + 1)^2/(x - 1) == E^3, x]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(-2 + e^3 - \sqrt{-8 e^3 + e^6}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-2 + e^3 + \sqrt{-8 e^3 + e^6}\right)\right\}\right\}$

Bei wirklich transzendenten Gleichungen weiß *Mathematica* dann gelegentlich auch nicht weiter.

```
Solve[√2 Log[x + 1] + Log[x - 1] == 1, x]
```

```
Solve::tdep :
 The equations appear to involve the variables to be solved
   for in an essentially non-algebraic way.
```

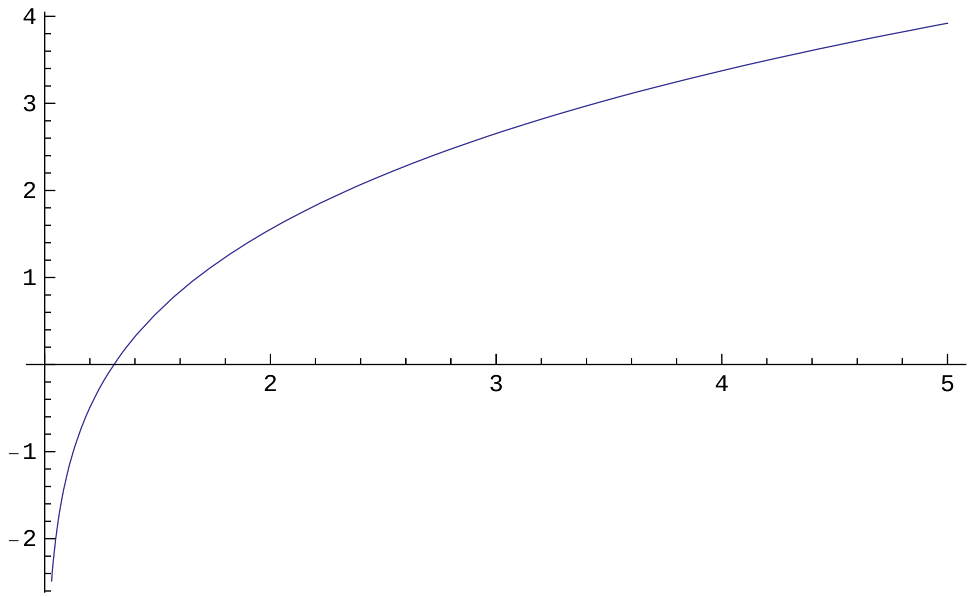
```
Solve[Log[-1 + x] + √2 Log[1 + x] == 1, x]
```

```
Reduce[√2 Log[x + 1] + Log[x - 1] == 1, x]
```

```
Reduce::nsmet :
 This system cannot be solved with the methods available to Reduce.
```

```
Reduce[Log[-1 + x] + √2 Log[1 + x] == 1, x]
```

```
Plot[√2 Log[x + 1] + Log[x - 1], {x, 1, 5}]
```




```
FindRoot[√2 Log[x + 1] + Log[x - 1] == 1, {x, 2}]
```

```
{x → 1.67576}
```

```
Solve[x + E^x == 12, x]
```

```
InverseFunction::ifun :
 Inverse functions are being used. Values may be
   lost for multivalued inverses.
```

```
{{x → 12 - ProductLog[ⅇ^12]}}
```

```
% // N
```

```
{{x → 2.27473}}
```

```
On[Solve::"ifun"];
```

■ Lösungen weiterverarbeiten

```
ClearAll["Global`*"]
```

Lösungen werden in Form von Substitutionslisten ausgegeben. Diese sind besonders einfach für die verschiedensten Zwecke der Weiterverarbeitung einzusetzen.

```
sys = {x^2 + y - 2 == 0, 3 x - y^2 - 2 == 0};
sol = Solve[sys, {x, y}]
```

$\left\{\{x \to 1, y \to 1\}, \{x \to 2, y \to -2\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right), y \to \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right), y \to \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$

Lösungstupel extrahieren

```
{x, y} /. sol
```

$\left\{\{1, 1\}, \{2, -2\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$

Lösungen in Ausdrücke einsetzen

```
x^2 + y^2 /. sol
% // Expand
```

$\left\{2, 8, \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)^2, \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)^2\right\}$

$\{2, 8, -5, -5\}$

Die Probe

```
sys /. sol
```

$\left\{\{\text{True}, \text{True}\}, \{\text{True}, \text{True}\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right) == 0, \text{True}\right\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right) == 0, \text{True}\right\}\right\}$

```
% // Expand
```

{{True, True}, {True, True}, {True, True}, {True, True}}

```
(First /@ sys) /. sol
```

$\left\{\{0, 0\}, \{0, 0\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right), -2 + \frac{3}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)^2\right\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right), -2 + \frac{3}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)^2\right\}\right\}$

```
% // Expand
```

{{0, 0}, {0, 0}, {0, 0}, {0, 0}}

Weiterarbeit mit einzelnen Lösungen.

```
Table[x^n + y^n, {n, 5}] /. sol[[3]] // Expand
```

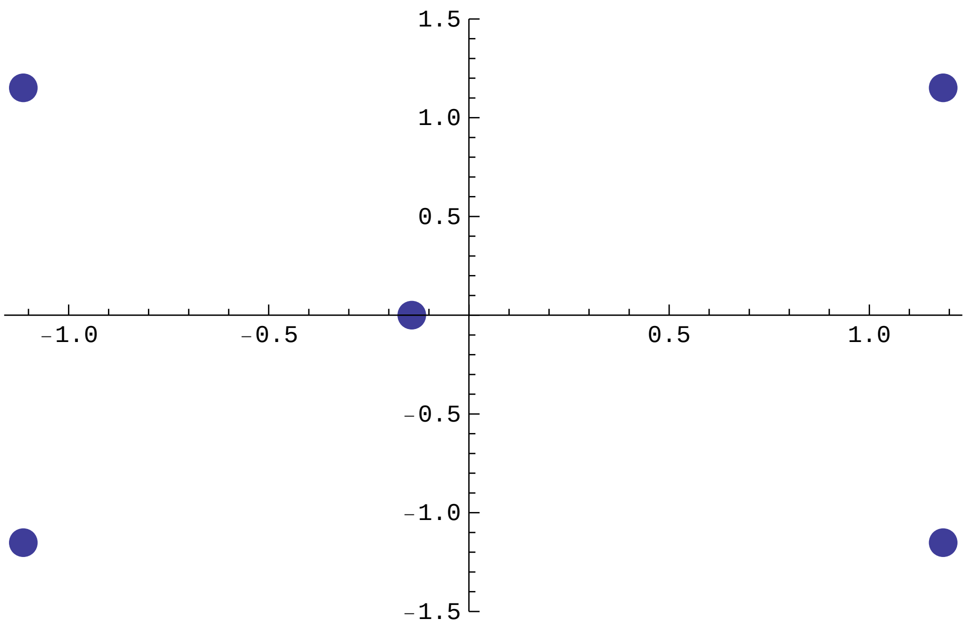
$\left\{-1-2\,i\sqrt{3},\ -5,\ -10+6\,i\sqrt{3},\ 31+24\,i\sqrt{3},\ 119-48\,i\sqrt{3}\right\}$

Lösungen in der komplexen Zahlenebene darstellen

```
l = Solve[x^5 + 7 x + 1 == 0, x] // N
```

```
{{x → -0.142849}, {x → -1.11308 - 1.15173 i},
 {x → -1.11308 + 1.15173 i}, {x → 1.1845 - 1.15139 i}, {x → 1.1845 + 1.15139 i}}
```

```
ListPlot[{Re[x], Im[x]} /. l, PlotStyle → PointSize[0.03], PlotRange → {-1.5, 1.5}]
```



Solve kann auch dazu verwendet werden, um implizite Formeln nach einzelnen Variablen aufzulösen und so Parameterdarstellungen zu gewinnen. Hier wird eine Kreisgleichung, die zum Vergleich leicht in die Normalform $(x+1)^2 + (y-4)^2 == 117$ gebracht werden kann, nach *y* aufgelöst.

```
lsg = Solve[x^2 + 2 x + y^2 - 8 y == 100, y]
```

$\left\{\left\{y \to 4-\sqrt{116-2\,x-x^2}\right\},\ \left\{y \to 4+\sqrt{116-2\,x-x^2}\right\}\right\}$

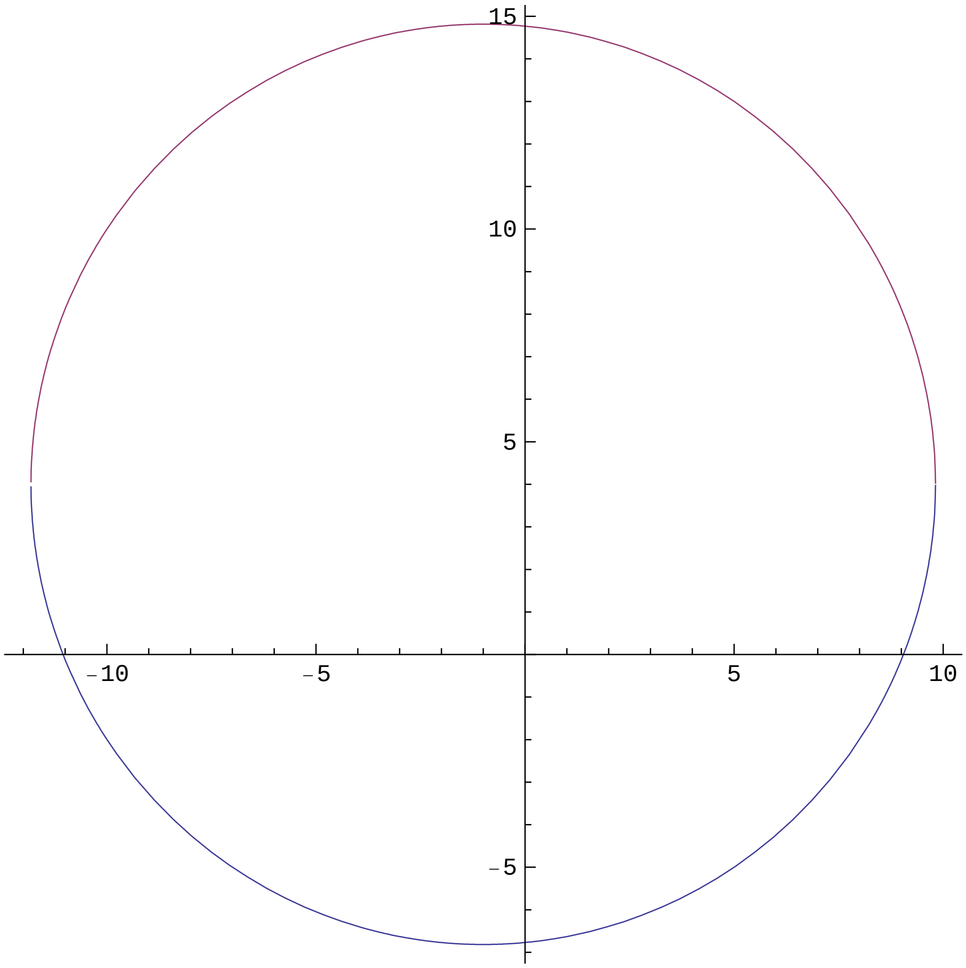
```
{f1[x_], f2[x_]} = y /. lsg
```

$\left\{4-\sqrt{116-2\,x-x^2},\ 4+\sqrt{116-2\,x-x^2}\right\}$

```
{f1[3], f2[4]} // N
```

{-6.04988, 13.5917}

```
Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, -12, 10}, AspectRatio → 1]
```



Nullstellen von Polynomen

```
ClearAll["Global`*"]
```

Die Root–Notation

```
nst = Solve[x^5 - x + 1 == 0, x]
```

```
{{x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 1]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 2]},
 {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 3]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 4]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 5]}}
```

Roots und **ToRules**

```
Roots[x^5 - x + 1 == 0, x]
```

x == Root[1 - #1 + #1^5 &, 1] || x == Root[1 - #1 + #1^5 &, 2] ||
x == Root[1 - #1 + #1^5 &, 3] || x == Root[1 - #1 + #1^5 &, 4] || x == Root[1 - #1 + #1^5 &, 5]

```
{% // ToRules}
```

{{x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 1]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 2]},
{x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 3]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 4]}, {x → Root[1 - #1 + #1^5 &, 5]}}

Weiterverarbeitung von Root−Ausdrücken

```
N[nst, 20]
```

{{x → -1.1673039782614186843}, {x → -0.18123244446987538390 - 1.0839541013177106684 3 ⅈ},
{x → -0.18123244446987538390 + 1.0839541013177106684 3 ⅈ},
{x → 0.76488443360058472603 - 0.35247154603172624932 ⅈ},
{x → 0.76488443360058472603 + 0.35247154603172624932 ⅈ}}

```
NSolve[x^5 - x + 1 == 0, x, 30]
```

{{x → -1.16730397826141868425604589985},
{x → -0.181232444469875383901800237781 - 1.08395410131771066843034449298 1 ⅈ},
{x → -0.181232444469875383901800237781 + 1.08395410131771066843034449298 1 ⅈ},
{x → 0.764884433600584726029823187 71 - 0.352471546031726249317947091 40 ⅈ},
{x → 0.764884433600584726029823187 71 + 0.352471546031726249317947091 40 ⅈ}}

```
Plus @@ (x /. nst) // Simplify
```

0

```
Plus @@ (x^{3,4,5} /. nst) // Simplify
```

{0, 4, -5}

Parameterabhängige Root−Ausdrücke

```
nst = Solve[x^5 + a x + 1 == 0, x]
```

{{x → Root[1 + a #1 + #1^5 &, 1]}, {x → Root[1 + a #1 + #1^5 &, 2]},
{x → Root[1 + a #1 + #1^5 &, 3]}, {x → Root[1 + a #1 + #1^5 &, 4]}, {x → Root[1 + a #1 + #1^5 &, 5]}}

```
% /. a → 1
```

{{x → Root[1 - #1^2 + #1^3 &, 1]}, {x → $\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$},
{x → $\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$}, {x → Root[1 - #1^2 + #1^3 &, 2]}, {x → Root[1 - #1^2 + #1^3 &, 3]}}

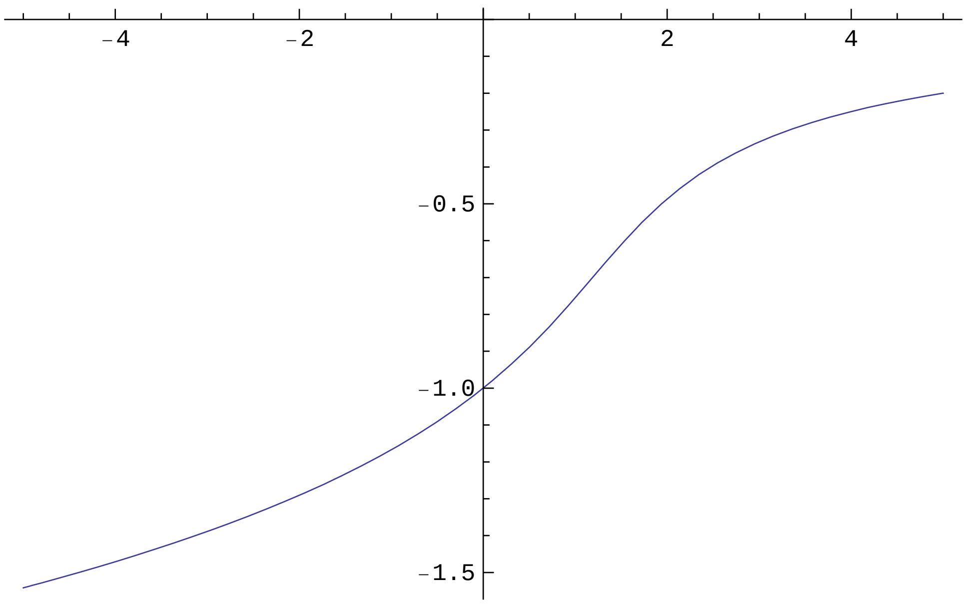
```
% // ToRadicals
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{25-3\sqrt{69}}\right)^{1/3}-\left(\frac{1}{2}\left(25-3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\left(-1-\mathbb{i}\sqrt{3}\right)\right\},\right.$$

$$\left\{x\to\frac{1}{2}\left(-1+\mathbb{i}\sqrt{3}\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1+\mathbb{i}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(25-3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}+\frac{1-\mathbb{i}\sqrt{3}}{3\,2^{2/3}\left(25-3\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right\},$$

$$\left.\left\{x\to\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(1-\mathbb{i}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(25-3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}+\frac{1+\mathbb{i}\sqrt{3}}{3\,2^{2/3}\left(25-3\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
r1[a_] = x /. nst[[1]];
Plot[r1[u], {u, -5, 5}]
```



▪ Rechnen mit algebraischen Zahlen

RootReduce

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ `// RootReduce`

Root$\left[1-10\,\#1^2+\#1^4\ \&,\ 4\right]$

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ `// Simplify`

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

```
% // RootReduce
```

$1+\sqrt{2}$

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$ **// Simplify**

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$$

% // RootReduce

6

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$$ **// FullSimplify**

6

Mehrere **Root**−Ausdrücke zum selben Polynom
Simultane Zuweisung an die Variablen $a_1, \ldots, a_5$:

nst = Solve$[x^5 - x + 1 == 0, x]$**;**
$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ **= x /. nst**

$\{\text{Root}[1-\#1+\#1^5\,\&, 1], \text{Root}[1-\#1+\#1^5\,\&, 2], \text{Root}[1-\#1+\#1^5\,\&, 3], \text{Root}[1-\#1+\#1^5\,\&, 4], \text{Root}[1-\#1+\#1^5\,\&, 5]\}$

$a_1 - a_2$ **// RootReduce**

$\text{Root}[2869+5000\,\#1^2+400\,\#1^4+3750\,\#1^6-40\,\#1^8+625\,\#1^{10}-95\,\#1^{12}-10\,\#1^{16}+\#1^{20}\,\&, 4]$

$$\frac{1+a_1}{1-a_1}$$ **// RootReduce**

$\text{Root}[1+13\,\#1+2\,\#1^2+18\,\#1^3-3\,\#1^4+\#1^5\,\&, 1]$

$$\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4}$$ **// RootReduce**

$\text{Root}[1+20\,\#1+185\,\#1^2+1065\,\#1^3+4339\,\#1^4+13\,520\,\#1^5+34\,005\,\#1^6+$
$71\,890\,\#1^7+132\,279\,\#1^8+219\,722\,\#1^9+342\,269\,\#1^{10}+512\,915\,\#1^{11}+736\,779\,\#1^{12}+$
$986\,252\,\#1^{13}+1\,191\,549\,\#1^{14}+1\,272\,045\,\#1^{15}+1\,191\,549\,\#1^{16}+986\,252\,\#1^{17}+$
$736\,779\,\#1^{18}+512\,915\,\#1^{19}+342\,269\,\#1^{20}+219\,722\,\#1^{21}+132\,279\,\#1^{22}+71\,890\,\#1^{23}+$
$34\,005\,\#1^{24}+13\,520\,\#1^{25}+4339\,\#1^{26}+1065\,\#1^{27}+185\,\#1^{28}+20\,\#1^{29}+\#1^{30}\,\&, 6]$

Rationalmachen des Nenners

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$ **// FullSimplify**

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

```
u = 1/(Sqrt[2] + Sqrt[3])
u1 = u // RootReduce
u2 = u1 // ToRadicals
u3 = u2 // FullSimplify
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Root[1 − 10 ♯1^2 + ♯1^4 &, 3]

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

```
LeafCount /@ {u, u1, u2, u3}
```

{13, 16, 13, 13}

```
u = 1/(Sqrt[2] + Sqrt[3] + Sqrt[5]) // Simplify
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

```
u1 = u // RootReduce // ToRadicals // FullSimplify
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)}$$

Alle Variablen mit Subscript löschen.

```
Clear[Subscript]
```

Inverse zu $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ als Linearkombination mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen.

$$inv = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{5} + a_4\sqrt{6} + a_5\sqrt{10} + a_6\sqrt{15} + a_7\sqrt{30};$$

$$ex = \text{Expand}\left[inv\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-1\right]$$

$$-1+\sqrt{2}\,a_0+\sqrt{3}\,a_0+\sqrt{5}\,a_0+2\,a_1+\sqrt{6}\,a_1+\sqrt{10}\,a_1+3\,a_2+\sqrt{6}\,a_2+\sqrt{15}\,a_2+5\,a_3+\sqrt{10}\,a_3+\sqrt{15}\,a_3+3\sqrt{2}\,a_4+2\sqrt{3}\,a_4+\sqrt{30}\,a_4+5\sqrt{2}\,a_5+2\sqrt{5}\,a_5+\sqrt{30}\,a_5+5\sqrt{3}\,a_6+3\sqrt{5}\,a_6+\sqrt{30}\,a_6+5\sqrt{6}\,a_7+3\sqrt{10}\,a_7+2\sqrt{15}\,a_7$$

$$\text{Collect}\left[ex,\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\right\}\right]$$

$$-1+2\,a_1+3\,a_2+5\,a_3+\sqrt{5}\,(a_0+2\,a_5+3\,a_6)+\sqrt{3}\left(a_0+2\,a_4+5\,a_6+\sqrt{5}\,(a_2+a_3+2\,a_7)\right)+\sqrt{2}\left(a_0+3\,a_4+5\,a_5+\sqrt{5}\,(a_1+a_3+3\,a_7)+\sqrt{3}\left(a_1+a_2+\sqrt{5}\,(a_4+a_5+a_6)+5\,a_7\right)\right)$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem extrahieren und lösen.

lhs = CoefficientList$\left[\text{ex}, \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right\}\right]$ // Flatten

$\{-1+2a_1+3a_2+5a_3,\ a_0+2a_5+3a_6,\ a_0+2a_4+5a_6,\ a_2+a_3+2a_7,\ a_0+3a_4+5a_5,\ a_1+a_3+3a_7,\ a_1+a_2+5a_7,\ a_4+a_5+a_6\}$

sol = Solve[lhs == 0]

$\left\{\left\{a_1\to\frac{1}{4},\ a_2\to\frac{1}{6},\ a_3\to 0,\ a_0\to 0,\ a_4\to 0,\ a_5\to 0,\ a_6\to 0,\ a_7\to -\frac{1}{12}\right\}\right\}$

u2 = inv /. sol⟦1⟧ // Together

$\frac{1}{12}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}\right)$

u2 == u

True

LeafCount /@ {u, u1, u2}

{18, 33, 26}

RootSum

nst = Solve$\left[x^5 - x + 1 == 0, x\right]$

$\{\{x\to \text{Root}[1-\#1+\#1^5\ \&,1]\},\ \{x\to \text{Root}[1-\#1+\#1^5\ \&,2]\},\ \{x\to \text{Root}[1-\#1+\#1^5\ \&,3]\},\ \{x\to \text{Root}[1-\#1+\#1^5\ \&,4]\},\ \{x\to \text{Root}[1-\#1+\#1^5\ \&,5]\}\}$

Plus @@ $\left(x^{\{1,3,4,5,6\}}\ /.\ \text{nst}\right)$ // Simplify

{0, 0, 4, -5, 0}

Plus @@ $\left(\frac{1}{z-x}\ /.\ \text{nst}\right)$ // FullSimplify

$\frac{-1+5z^4}{1-z+z^5}$

RootSum$\left[1-\#1+\#1^5\ \&,\ \frac{1}{z-\#}\ \&\right]$

$\frac{-1+5z^4}{1-z+z^5}$

```
RootSum[1 - #1 + #1^5 &, 1/(z^2 - 3 # z + #^3) &]
```

$$\frac{-1+15 z+12 z^2-171 z^4+36 z^5+5 z^8}{-1+3 z-z^2-39 z^3+15 z^4+243 z^5-126 z^6+12 z^7+z^{10}}$$

```
RootSum[1 - #1 + #1^5 &, Sin[#] &]
```

```
RootSum[1 - #1 + #1^5 &, Sin[#1] &]
```

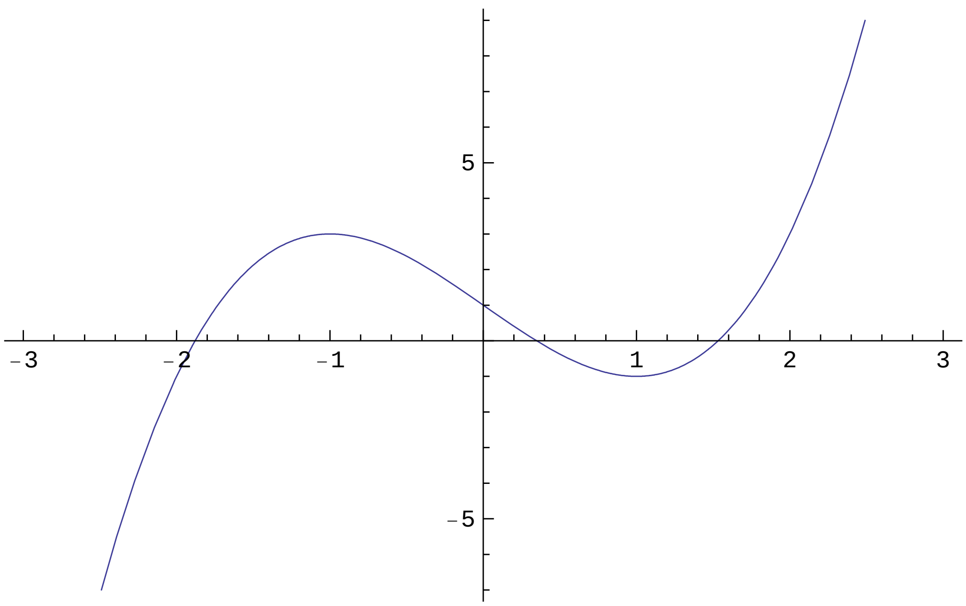
```
% // Normal
```

```
Sin[Root[1 - #1 + #1^5 &, 1]] + Sin[Root[1 - #1 + #1^5 &, 2]] +
 Sin[Root[1 - #1 + #1^5 &, 3]] + Sin[Root[1 - #1 + #1^5 &, 4]] + Sin[Root[1 - #1 + #1^5 &, 5]]
```

■ Polynome dritten und vierten Grades

■ Polynome dritten Grades

```
f = x^3 - 3 x + 1;
Plot[f, {x, -3, 3}]
```



Solve verwendet die Cardanoschen Formeln zur Darstellung der Nullstellen eines Polynoms dritten Grades. Besonders im casus irreducibilis ist es schwer zu entscheiden, dass es sich bei den Lösunngen um reelle Zahlen handelt.

```
sol = Solve[f == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^{1/3}}+\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^{1/3}\right\},\right.$$

$$\left\{x \to -\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{1/3}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^{1/3}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\left.\left\{x \to -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^{1/3}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
(x /. sol) // N
```

$$\{1.53209+0.\,i,\ 0.347296+1.11022\times10^{-16}\,i,\ -1.87939-1.11022\times10^{-16}\,i\}$$

```
FullSimplify[x ∈ Reals /. sol]
```

{True, True, True}

ComplexExpand findet sogar die trigonometrische Darstellung der entsprechenden aklgebraischen Zahlen, die im casus irreducibilis eigentlich verwendet werden sollte. Mit trigonometrischen Ausdrücken kann *Mathematica* aber als algebraische Zahlen schlechter rechnen.

```
sol1 = sol // ComplexExpand
```

$$\left\{\left\{x \to \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]+\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]\right\},\ \left\{x \to \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]-\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]\right\},\ \left\{x \to -2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]\right\}\right\}$$

Deutlich besser kann *Mathematica* mit der Darstellung der Nullstellen in **Root**−Notation umgehen, die man etwa wie folgt erzeugen kann:

```
sol2 = {Reduce[f == 0, x] // ToRules}
```

$$\left\{\left\{x \to \mathrm{Root}\left[1-3\,\#1+\#1^3\,\&,\ 1\right]\right\},\ \left\{x \to \mathrm{Root}\left[1-3\,\#1+\#1^3\,\&,\ 2\right]\right\},\ \left\{x \to \mathrm{Root}\left[1-3\,\#1+\#1^3\,\&,\ 3\right]\right\}\right\}$$

```
sol2 // N
```

$$\{\{x \to -1.87939\},\ \{x \to 0.347296\},\ \{x \to 1.53209\}\}$$

```
x ∈ Reals /. sol2
```

{True, True, True}

Rekombination der Nullstellen zum Ausgangspolynom in den drei Darstellungen.
Zunächst die Darstellung durch Wurzelausdrücke.

```
Times @@ (x - (x /. sol)) // Expand
```

$$\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}-3\,x+x^3$$

```
% // Together
```

$1-3x+x^3$

Hier die ausgeführten Schritte im Einzelnen. A=$\mathbb{i}\sqrt{3}$ ist der einzige Kern im Absolutglied.

$$\frac{1}{2}-\frac{A}{2}-\frac{2}{-1+A} \text{ // Together}$$

$$\frac{-5+2A-A^2}{2(-1+A)}$$

$$\% \text{ /. } A^2 \to -3$$

$$\frac{-2+2A}{2(-1+A)}$$

```
% // Cancel
```

1

Nun die trigonometrische Darstellung.

```
Times @@ (x - (x /. sol1)) // Expand
```

$$x^3-3x\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]^2+2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]^3-3x\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]^2-6\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right]^2$$

```
% // TrigReduce
```

$1-3x+x^3$

Und schließlich die durch **Root**−Ausdrücke.

```
Times @@ (x - (x /. sol2)) // Expand
```

$$x^3-x^2\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,1\right]-x^2\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,2\right]+$$
$$x\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,1\right]\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,2\right]-$$
$$x^2\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,3\right]+x\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,1\right]\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,3\right]+$$
$$x\,\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,2\right]\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,3\right]-$$
$$\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,1\right]\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,2\right]\mathrm{Root}\left[1-3\#1+\#1^3\,\&,3\right]$$

```
% // Simplify
```

$1-3x+x^3$

Generell lässt sich feststellen, dass *Mathematica* zwar weiß, dass die folgenden Ausdrücke algebraische Zahlen sind, aber nur zu wenigen die **Root**−−Darstellung berechnen kann.

```
Sin[π/Range[3, 15]] // RootReduce
```

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{Root}[5 - 20\,\#1^2 + 16\,\#1^4\,\&, 3], \frac{1}{2}, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{7}\right], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{8}\right], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right], \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right), \text{Sin}\left[\frac{\pi}{11}\right], \text{Root}[1 - 16\,\#1^2 + 16\,\#1^4\,\&, 3], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{13}\right], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{15}\right]\right\}$$

```
# ∈ Algebraics & /@ %
```

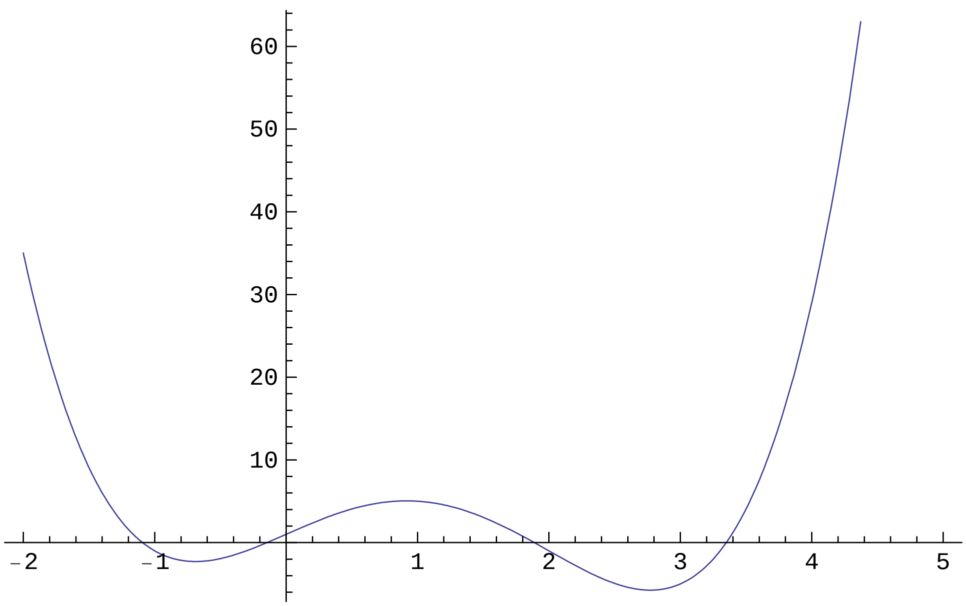
{True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True}

```
Sin[π/Range[3, 15]] // FunctionExpand
```

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}, \frac{1}{2}, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{7}\right], \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{9}\right], \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right), \text{Sin}\left[\frac{\pi}{11}\right], \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{13}\right], \text{Sin}\left[\frac{\pi}{14}\right], -\frac{1}{8}\sqrt{3}\left(-1+\sqrt{5}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}\right\}$$

■ Polynome vierten Grades

```
f = x^4 - 4 x^3 + 7 x + 1;
Plot[f, {x, -2, 5}]
```



Mit solchen Lösungsformeln kann man wirklich nichts mehr anfangen.

```
sol = Solve[f == 0, x]
```

```
sol // Simplify
```

Dass es sich um vier reelle Lösungen handelt, erkennt *Mathematica* aus dieser Form nur mit Mühe. Selbst das mächtige **FullSImplify** braucht dafür einige Zeit.

```
sol // N
```

$$\{\{x \to -1.09306 + 1.03463\times10^{-17}\, i\}, \{x \to -0.144649 - 1.89189\times10^{-17}\, i\}, \{x \to 1.88829 + 1.37842\times10^{-17}\, i\}, \{x \to 3.34943 - 5.21162\times10^{-18}\, i\}\}$$

```
FullSimplify[x ∈ Reals /. sol] // Timing
```

{83.71, {True, True, True, True}}

Mit dem Ergebnis von **ComplexExpand** kann man wohl auch kaum etwas anfangen.

```
sol1 = ComplexExpand /@ sol
```

```
sol1 // N
```

$$\{\{x \to -1.09306\}, \{x \to -0.144649\}, \{x \to 1.88829\}, \{x \to 3.34943\}\}$$

Mit der Darstellung in **Root**−Notation dagegen kann *Mathematica* gut umgehen. Alle relevanten Informationen über die Nullstellen sind ohne weitere Vereinfachungen verfügbar.

```
sol2 = {Reduce[f == 0, x] // ToRules}
```

$$\{\{x \to \mathrm{Root}[1 + 7\,\#1 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&, 1]\}, \{x \to \mathrm{Root}[1 + 7\,\#1 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&, 2]\}, \{x \to \mathrm{Root}[1 + 7\,\#1 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&, 3]\}, \{x \to \mathrm{Root}[1 + 7\,\#1 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&, 4]\}\}$$

```
sol2 // N
```

$$\{\{x \to -1.09306\}, \{x \to -0.144649\}, \{x \to 1.88829\}, \{x \to 3.34943\}\}$$

```
x ∈ Reals /. sol2
```

{True, True, True, True}

Für diese Kontrollrechnung schafft es erst das mächtige **FullSimplify**, die geschachtelten Wurzelausdrücke aufzulösen.

```
Times @@ (x - (x /. sol)) // Expand
```

$$\frac{7}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\left(585 + i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{\left(585 + i\sqrt{50991}\right)^{2/3}}{12\; 2^{2/3}\; 3^{1/3}} + \frac{256}{\left(\frac{3}{2}\left(585 + i\sqrt{50991}\right)\right)^{2/3}} - \frac{32}{\left(\frac{3}{2}\left(585 + i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}} - \frac{1}{4\left(4 + \frac{\left(\frac{1}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{32}{\left(\frac{3}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}\right)} + 7\,x - 4\,x^3 + x^4$$

```
s1 = % // Simplify
```

$$\frac{7}{3}-\frac{\left(\frac{1}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{\left(585+i\sqrt{50991}\right)^{2/3}}{12\,2^{2/3}\,3^{1/3}}+\frac{256}{\left(\frac{3}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{2/3}}-\frac{32}{\left(\frac{3}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}-\frac{1}{4\left(4+\frac{\left(\frac{1}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{32}{\left(\frac{3}{2}\left(585+i\sqrt{50991}\right)\right)^{1/3}}\right)}+7x-4x^3+x^4$$

```
s1 // N // Chop
```

$1.+7.x-4.x^3+x^4$

```
s1 // FullSimplify
```

$1+7x-4x^3+x^4$

Mit der Ausgabe von **ComplexExpand** kommt *Mathematica* dagegen überraschend gut zurecht.

```
Times @@ (x - (x /. sol1)) // Expand
```

$$-3+7x-4x^3+x^4-8\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{\frac{16997}{3}}}{195}\right]\right]+\frac{32}{3}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{\frac{16997}{3}}}{195}\right]\right]^2-\frac{1}{4\left(4+8\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{3}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{\frac{16997}{3}}}{195}\right]\right]\right)}$$

```
s1 = % // Simplify
```

$1+7x-4x^3+x^4$

Mit der **Root**−Notation bereitet diese Vereinfachung ebenfalls keine Schwierigkeiten.

```
s2 = Times @@ (x - (x /. sol2)) // Expand
```

x^4 - x^3 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] - x^3 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] -
x^3 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] -
x Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] -
x^3 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] -
x Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
x^2 Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] -
x Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] -
x Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]
Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] Root[1 + 7 #1 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]

```
% // Simplify
```

$1 + 7x - 4x^3 + x^4$

Auch andere abgeleitete Ausdrücke wie diese Potenzsummen kann *Mathematica* deutlich einfacher vereinfachen, wenn die Nullstellen in **Root**−Notation vorliegen.

```
Plus @@ (x^{2, 3, 4, 5} /. sol) // FullSimplify
```

{16, 43, 140, 444}

```
Plus @@ (x^{2, 3, 4, 5} /. sol2) // Simplify
```

{16, 43, 140, 444}

$$\text{Plus @@ }\left(\frac{1}{y^2 - x\,y - x^3}\text{ /. sol}\right)\text{ // FullSimplify}$$

Schreibt man dieselbe Aufgabe mit den Nullstellen in **Root**−Notation an, so gelingt die Vereinfachung mit **Simplify**, nachdem *Mathematica* der Tipp gegeben wird, es doch einmal mit der rationalen Normalform zu versuchen. Der **LeafCount** ist deutlich kleiner geworden. **FullSimplify** stellt übrigens Zähler und Nenner zusätzlich nach dem Hornerschema dar, was den **LeafCount** noch einmal verringert.

```
Plus @@ (1/(y^2 - x y - x^3) /. sol2) // Simplify
% // LeafCount
```

$$\frac{1}{y^2 - y\,\mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 1] - \mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 1]^3} + \frac{1}{y^2 - y\,\mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 2] - \mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 2]^3} + \frac{1}{y^2 - y\,\mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 3] - \mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 3]^3} + \frac{1}{y^2 - y\,\mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 4] - \mathrm{Root}[1 + 7\#1 - 4\#1^3 + \#1^4\&, 4]^3}$$

213

```
u = Plus @@ (1/(y^2 - x y - x^3) /. sol2) // Together // Simplify
% // LeafCount
```

$$\frac{331 + 427\,y + 506\,y^2 + 71\,y^3 - 129\,y^4 - 12\,y^5 + 4\,y^6}{1 + 49\,y + 389\,y^2 + 443\,y^3 + 312\,y^4 + 39\,y^5 - 43\,y^6 - 4\,y^7 + y^8}$$

71

```
u // FullSimplify
% // LeafCount
```

$$\frac{331 + y\,(427 + y\,(506 + y\,(71 + y\,(-129 + 4\,(-3 + y)\,y))))}{1 + y\,(49 + y\,(389 + y\,(443 + y\,(312 + y\,(39 + y\,(-43 + (-4 + y)\,y))))))}$$

58

■ Polynomiale Gleichungssysteme

```
ClearAll["Global`*"]
```

■ Beispiel 1: Ein System mit Symmetrien

Das folgende Gleichungssystem ist invariant unter zyklischer Vertauschung der Variablen. Diese Eigenschaft hat deshalb auch die Lösungsmenge. An der Ausgabe des **Solve**−Kommandos ist das nicht so recht sichtbar.

```
polys = {z^2 + x + y - 3, y^2 + x + z - 3, x^2 + y + z - 3};
vars = {x, y, z};
sol = Solve[polys == 0 , vars]
```

$$\left\{\{x\to -3,\ y\to -3,\ z\to -3\},\ \{x\to 1,\ y\to 1,\ z\to 1\},\ \left\{x\to -\sqrt{2},\ y\to 1+\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to \sqrt{2},\ y\to 1-\sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1-\sqrt{2},\ y\to \sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1+\sqrt{2},\ y\to -\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 2\sqrt{2}-\frac{4}{-1+2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{-1+2\sqrt{2}},\ y\to \frac{4-\sqrt{2}}{-1+2\sqrt{2}},\ z\to 1-\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to -2\sqrt{2}+\frac{4}{1+2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}},\ y\to \frac{-4-\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}},\ z\to 1+\sqrt{2}\right\}\right\}$$

```
sol // N
```

```
{{x → -3., y → -3., z → -3.}, {x → 1., y → 1., z → 1.},
 {x → -1.41421, y → 2.41421, z → -1.41421}, {x → 1.41421, y → -0.414214, z → 1.41421},
 {x → -0.414214, y → 1.41421, z → 1.41421}, {x → 2.41421, y → -1.41421, z → -1.41421},
 {x → 1.41421, y → 1.41421, z → -0.414214}, {x → -1.41421, y → -1.41421, z → 2.41421}}
```

```
sol // Simplify
```

$$\left\{\{x\to -3,\ y\to -3,\ z\to -3\},\ \{x\to 1,\ y\to 1,\ z\to 1\},\ \left\{x\to -\sqrt{2},\ y\to 1+\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to \sqrt{2},\ y\to 1-\sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1-\sqrt{2},\ y\to \sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1+\sqrt{2},\ y\to -\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to \frac{4-\sqrt{2}}{-1+2\sqrt{2}},\ y\to \frac{4-\sqrt{2}}{-1+2\sqrt{2}},\ z\to 1-\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to -\frac{4+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}},\ y\to -\frac{4+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}},\ z\to 1+\sqrt{2}\right\}\right\}$$

```
sol // FullSimplify
```

$$\left\{\{x\to -3,\ y\to -3,\ z\to -3\},\ \{x\to 1,\ y\to 1,\ z\to 1\},\ \left\{x\to -\sqrt{2},\ y\to 1+\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to \sqrt{2},\ y\to 1-\sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1-\sqrt{2},\ y\to \sqrt{2},\ z\to \sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to 1+\sqrt{2},\ y\to -\sqrt{2},\ z\to -\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to \sqrt{2},\ y\to \sqrt{2},\ z\to 1-\sqrt{2}\right\},\ \left\{x\to -\sqrt{2},\ y\to -\sqrt{2},\ z\to 1+\sqrt{2}\right\}\right\}$$

Statt **Solve** können Sie auch **Reduce** einsetzen, um Gleichungssysteme in einfachere Form zu bringen. In Ergebnis wird das Problem in eine boolesche Kombination mehrerer Teilprobleme zerlegt, die sich mit **LogicalExpand** in die distributive Normalform bringen lässt.

```
rsys = Reduce[polys == 0, vars]
```

$$\left(\left(x == -\sqrt{2}\ \|\ x == \sqrt{2}\right)\ \&\&\ \left(y == \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{9-4x}\right)\ \|\ y == \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{9-4x}\right)\right)\ \&\&\ z == 1-y\right)\ \|\ \left(\left(x == -3\ \|\ x == 1\ \|\ x == 1-\sqrt{2}\ \|\ x == 1+\sqrt{2}\right)\ \&\&\ y == \frac{1}{2}\left(3-x^2\right)\ \&\&\ z == 3-x^2-y\right)$$

```
rsys // LogicalExpand
```

$$\left(x == -3 \&\& y == \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) \&\& z == 3 - x^2 - y\right) \;||\; \left(x == 1 \&\& y == \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) \&\& z == 3 - x^2 - y\right) \;||\; \left(x == -\sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{9 - 4x}\right) \&\& z == 1 - y\right) \;||\; \left(x == -\sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{9 - 4x}\right) \&\& z == 1 - y\right) \;||\; \left(x == \sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{9 - 4x}\right) \&\& z == 1 - y\right) \;||\; \left(x == \sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{9 - 4x}\right) \&\& z == 1 - y\right) \;||\; \left(x == 1 - \sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) \&\& z == 3 - x^2 - y\right) \;||\; \left(x == 1 + \sqrt{2} \&\& y == \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) \&\& z == 3 - x^2 - y\right)$$

Solve kann auch mit solchen booleschen Kombinationen von Gleichungen aufgerufen werden. Hier liefert es gleich die Antwort, welche **Solve** auf dem Ausgangssystem erst nach Anwendung von **FullSimplify** gefunden hat.

```
Solve[rsys, vars]
```

$$\{\{z \to -3, y \to -3, x \to -3\}, \{z \to 1, y \to 1, x \to 1\}, \{z \to -\sqrt{2}, x \to -\sqrt{2}, y \to 1 + \sqrt{2}\}, \{z \to -\sqrt{2}, y \to -\sqrt{2}, x \to 1 + \sqrt{2}\}, \{z \to \sqrt{2}, x \to \sqrt{2}, y \to 1 - \sqrt{2}\}, \{z \to \sqrt{2}, y \to \sqrt{2}, x \to 1 - \sqrt{2}\}, \{z \to 1 - \sqrt{2}, x \to \sqrt{2}, y \to \sqrt{2}\}, \{z \to 1 + \sqrt{2}, x \to -\sqrt{2}, y \to -\sqrt{2}\}\}$$

Das Vorgehen beim Lösen dieses Systems folgt grob dieser Idee:

```
f = Eliminate[polys == 0 , {x, y}]
```

$$-8z + 19z^2 + 4z^3 - 10z^4 + z^6 == 6$$

```
Factor[f[[1]] - f[[2]]]
```

$$(-1 + z)\,(3 + z)\,\left(-2 + z^2\right)\,\left(-1 - 2z + z^2\right)$$

Beispiel 2: Bestimmung der kritischen Punkte einer Funktion

```
f = 6 x^3 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^2;
polys = {D[f, x], D[f, y]};
vars = {x, y};
Solve[polys == 0 , vars]
```

```
Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.
```

$$\{\{x \to 3, y \to 2\}, \{x \to 0\}, \{x \to 0\}, \{x \to 0\}, \{x \to 0\}, \{x \to 0\}, \{x \to 0\}, \{y \to 0\}, \{y \to 0\}\}$$

```
% // Union
```

$$\{\{x \to 0\}, \{y \to 0\}, \{x \to 3, y \to 2\}\}$$

```
Solve[Reduce[polys == 0 , vars], vars]
```

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$\{\{x \to 3, y \to 2\}, \{x \to 0\}, \{y \to 0\}\}$

Weitere Beispiele

```
polys = {w + x + y + z, w x + x y + w z + y z, w x y + w x z + w y z + x y z, w x y z - 1};
vars = {w, x, y, z};
Solve[polys == 0 , vars]
```

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\left\{w \to -\frac{1}{z}, y \to \frac{1}{z}, x \to -z\right\}, \left\{w \to \frac{1}{z}, y \to -\frac{1}{z}, x \to -z\right\}, \left\{x \to -\frac{1}{w}, z \to \frac{1}{w}, y \to -w\right\}, \left\{x \to \frac{1}{w}, z \to -\frac{1}{w}, y \to -w\right\}\right\}$$

```
Reduce[polys == 0 , vars]
Solve[%, vars]
```

$$w \neq 0 \,\&\&\, \left(x == -\frac{1}{w} \,||\, x == \frac{1}{w}\right) \,\&\&\, y == -w \,\&\&\, z == -x$$

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\left\{y \to -w, z \to -\frac{1}{w}, x \to \frac{1}{w}\right\}, \left\{y \to -w, z \to \frac{1}{w}, x \to -\frac{1}{w}\right\}\right\}$$

```
polys = {6 t x y^2 - t x^2 z - 6 t x y z + 3 t x z^2 - 2 t z^3 - 6 x y^2 + 6 x y z - 2 x z^2, -t x^2 y +
    3 t x y^2 + 10 t y^3 - 15 t y^2 z + 3 t y z^2 - 3 x y^2 - 10 y^3 + x y z + 15 y^2 z - 5 y z^2,
   18 t x^2 y^2 - 3 t x^3 z - 18 t x^2 y z + 12 t x y^2 z + 5 t x^2 z^2 - 12 t x y z^2 +
    6 t x z^3 - 8 t z^4 - 18 x^2 y^2 + 18 x^2 y z - 12 x y^2 z - 4 x^2 z^2 + 12 x y z^2 - 6 x z^3,
   -63 t^2 x y^2 + 9 t^2 x^2 z + 63 t^2 x y z + 18 t^2 y^2 z - 27 t^2 x z^2 -
    18 t^2 y z^2 + 18 t^2 z^3 + 78 t x y^2 - 78 t x y z - 18 t y^2 z +
    24 t x z^2 + 18 t y z^2 - 9 t z^3 - 15 x y^2 + 15 x y z - 5 x z^2};
vars = {t, x, y, z};
sol1 = Solve[polys == 0 , vars]
```

Solve::svars :
Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\{y \to 0, z \to 0\}, \{t \to 1, x \to 0, z \to 0\}, \{y \to 0, t \to 0, x \to 0\}, \left\{y \to 0, t \to \frac{1}{3}, x \to -z\right\}, \left\{y \to \frac{z}{2}, t \to -\frac{1}{3}, x \to z\right\}, \left\{y \to \frac{z}{2}, t \to 0, x \to 0\right\}, \{y \to z, t \to 0, x \to 0\}, \left\{y \to z, t \to \frac{1}{3}, x \to -z\right\}\right\}$$

```
Reduce[polys == 0 , vars];
sol2 = Solve[%, vars]
```

Solve::svars :
 Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{\{y \to 0, z \to 0\}, \{t \to 0, x \to 0, y \to 0\}, \left\{t \to 0, x \to 0, y \to \frac{z}{2}\right\}, \{t \to 0, x \to 0, y \to z\}, \{t \to 1, x \to 0, z \to 0\}, \left\{y \to 0, z \to -x, t \to \frac{1}{3}\right\}, \left\{y \to -x, z \to -x, t \to \frac{1}{3}\right\}, \left\{y \to \frac{x}{2}, z \to x, t \to -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

Vergleich der beiden Lösungen.

```
u = Sort /@ ({x, y, z, t} /. {sol1, sol2})
```

$$\left\{\left\{\{0, 0, z, 0\}, \{0, y, 0, 1\}, \left\{0, \frac{z}{2}, z, 0\right\}, \{0, z, z, 0\}, \{x, 0, 0, t\}, \left\{-z, 0, z, \frac{1}{3}\right\}, \left\{-z, z, z, \frac{1}{3}\right\}, \left\{z, \frac{z}{2}, z, -\frac{1}{3}\right\}\right\}, \left\{\{0, 0, z, 0\}, \{0, y, 0, 1\}, \left\{0, \frac{z}{2}, z, 0\right\}, \{0, z, z, 0\}, \{x, 0, 0, t\}, \left\{x, 0, -x, \frac{1}{3}\right\}, \left\{x, -x, -x, \frac{1}{3}\right\}, \left\{x, \frac{x}{2}, x, -\frac{1}{3}\right\}\right\}\right\}$$

Eine Geometrieaufgabe

Ein Geometrieproblem: Im Dreieck mit den Eckpunkten A(0,0), B(2,0), C(u,1) ist P(x1,x2) der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch A und B. Da sich Innen− und Außenwinkelhalbierende algebraisch nicht unterscheiden lassen, erhalten wir ein System **whpolys** mit zwei Polynomen zweiten Grades und daraus vier mögliche Schnittpunkte der Winkelhalbierdendenpaare durch A und B. Die Lösung hängt von einem Parameter u ab.

whcon ist die Bedingung, dass P auch auf dem WInkelhalbierendenpaar durch C liegt.

```
ClearAll["Global`*"]
whpolys = {4 - 4 x1 + x1^2 - 8 x2 + 4 u x2 + 4 x1 x2 - 2 u x1 x2 - x2^2, 2 + 2 u^2 - 2 x1 - 2 u^2 x1 - 2 x1^2 +
    2 u x1^2 - 4 x2 + 2 u x2 - 4 u^2 x2 + 2 u^3 x2 + 2 x1 x2 + 4 u x1 x2 - 2 u^2 x1 x2 + 2 x2^2 - 2 u x2^2};
whcon = x1^2 - 2 u x1 x2 - x2^2;
```

```
sol = Solve[whpolys == 0, {x1, x2}] // Simplify
```

$$\left\{\left\{x1\to\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{1+u^2}-u\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}-\sqrt{1+u^2}\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right),\right.\right.$$

$$\left.x2\to\frac{1}{2}\left(1+u^2+2\sqrt{1+u^2}-u\left(2+\sqrt{1+u^2}\right)-\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right)\right\},$$

$$\left\{x1\to\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{1+u^2}+u\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}+\sqrt{1+u^2}\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right),\right.$$

$$\left.x2\to\frac{1}{2}\left(1+u^2+2\sqrt{1+u^2}-u\left(2+\sqrt{1+u^2}\right)+\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2-2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right)\right\},$$

$$\left\{x1\to\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{1+u^2}-u\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}+\sqrt{1+u^2}\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right),\right.$$

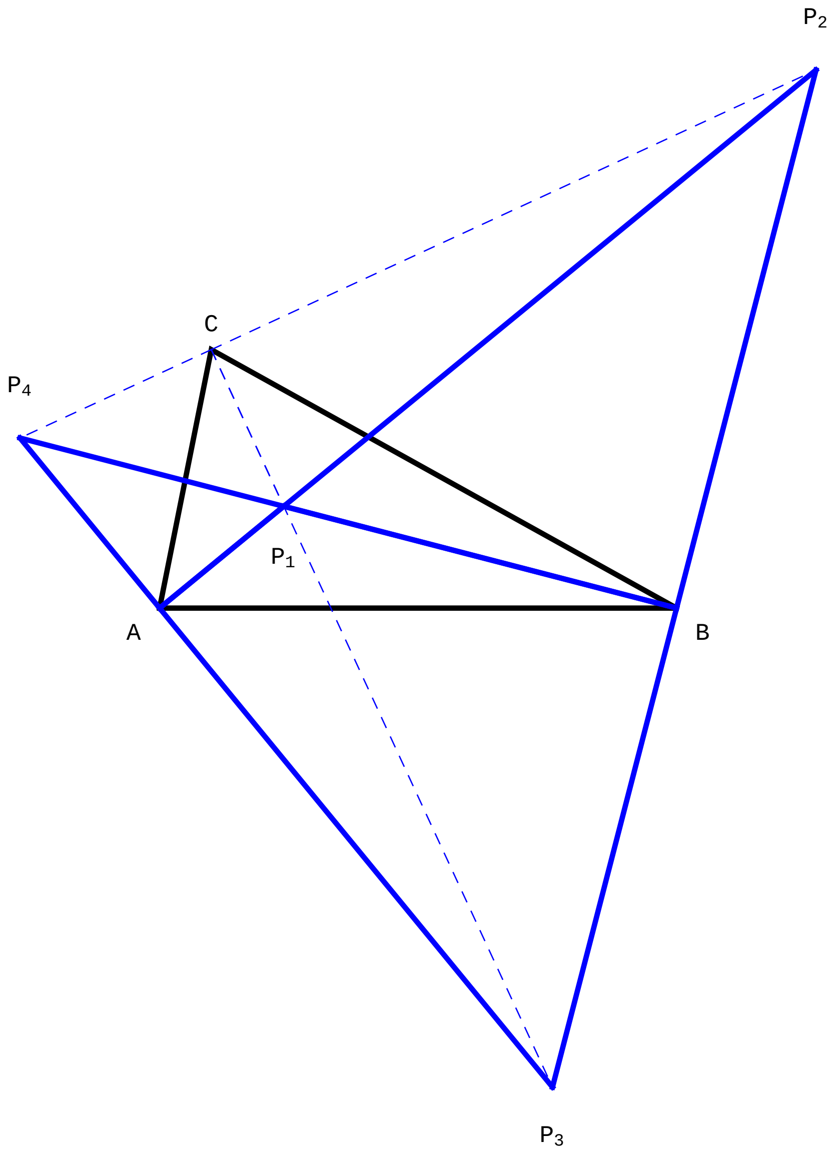
$$\left.x2\to\frac{1}{2}\left(1+u^2-2\sqrt{1+u^2}+u\left(-2+\sqrt{1+u^2}\right)-\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right)\right\},$$

$$\left\{x1\to\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{1+u^2}+u\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}-\sqrt{1+u^2}\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right),\right.$$

$$\left.\left.x2\to\frac{1}{2}\left(1+u^2-2\sqrt{1+u^2}+u\left(-2+\sqrt{1+u^2}\right)+\sqrt{\left(5-4u+u^2\right)\left(1+2u^2+2u\sqrt{1+u^2}\right)}\right)\right\}\right\}$$

Hier ein Bild, in welches die berechneten Daten unmittelbar eingehen. Die Punkte sind so benannt, weil C und D Protected sind und deshalb nicht ohne weiteres für Zuweisungen zur Verfügung stehen.

```
PA = {0, 0}; PB = {2, 0}; PC = {u, 1}; PP = {x1, x2};
u0 = 0.2;
txt1 =
  {Text["A", PA + {-.1, -.1}], Text["B", PB + {.1, -.1}], Text["C", PC + {0, .1}]} /. u → u0;
txt2 = (Text[Subscript["P", #], PP + (-1)^# {0, .2}] /. sol[[#]] /. u → u0) & /@ Range[4];
l = Line[{PA, PB, PC, PA}] /. u → u0;
w1 = Line[{{PA, PP}, {PB, PP}}] /. sol /. u → u0;
w2 = Line[{PC, PP}] /. sol /. u → u0;
Graphics[{{Thick, l, Blue, w1}, {Blue, Dashed, w2}, txt1, txt2}]
```




```
whcon /. sol // Simplify
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

```
red = Reduce[whpolys == 0, {x1, x2}]
```

$$\Big(\big(u == 2 - i \;||\; u == 2 + i\big) \;\&\&\; \Big(x2 == \frac{1}{2}\left(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1 - \sqrt{(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1)^2 + 4\left(4 - 4x1 + x1^2\right)}\right) \;||\; x2 == \frac{1}{2}\left(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1 + \sqrt{(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1)^2 + 4\left(4 - 4x1 + x1^2\right)}\right)\Big)\Big) \;||$$

$$\left(u == 1 \;\&\&\; x1 == 1 \;\&\&\; \left(x2 == -1 - \sqrt{2} \;||\; x2 == -1 + \sqrt{2}\right)\right) \;||$$

$$\left(u == 1 \;\&\&\; \left(x1 == 1 - \sqrt{2} \;||\; x1 == 1 + \sqrt{2}\right) \;\&\&\; x2 == 1\right) \;||$$

$$\Bigg(5 - 4u + u^2 \neq 0 \;\&\&\; \Bigg(x1 == \frac{1}{4}\left(4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 - \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$

$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 - \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$

$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 + \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$

$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 + \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right)\Bigg) \;\&\&$$

$$-1 + u \neq 0 \;\&\&\; x2 == \frac{-1 + x1 - 2u\,x1 + 2x1^2 + u\,x1^2 - x1^3}{-1 + u}\Bigg)$$

sol1 = {red // ToRules}

$$\Big\{\Big\{u\to 2-i,\ x2\to \frac{1}{2}\left(-8+4u+4x1-2u\,x1-\sqrt{(-8+4u+4x1-2u\,x1)^2+4\left(4-4x1+x1^2\right)}\right)\Big\},$$

$$\Big\{u\to 2-i,\ x2\to \frac{1}{2}\left(-8+4u+4x1-2u\,x1+\sqrt{(-8+4u+4x1-2u\,x1)^2+4\left(4-4x1+x1^2\right)}\right)\Big\},$$

$$\Big\{u\to 2+i,\ x2\to \frac{1}{2}\left(-8+4u+4x1-2u\,x1-\sqrt{(-8+4u+4x1-2u\,x1)^2+4\left(4-4x1+x1^2\right)}\right)\Big\},$$

$$\Big\{u\to 2+i,\ x2\to \frac{1}{2}\left(-8+4u+4x1-2u\,x1+\sqrt{(-8+4u+4x1-2u\,x1)^2+4\left(4-4x1+x1^2\right)}\right)\Big\},$$

$$\Big\{u\to 1,\ x1\to 1,\ x2\to -1-\sqrt{2}\Big\},\ \Big\{u\to 1,\ x1\to 1,\ x2\to -1+\sqrt{2}\Big\},\ \Big\{u\to 1,\ x1\to 1-\sqrt{2},\ x2\to 1\Big\},$$

$$\Big\{u\to 1,\ x1\to 1+\sqrt{2},\ x2\to 1\Big\},\ \Big\{x1\to \frac{1}{4}\left(4-2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2-\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),$$

$$x2\to \frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\Big\},$$

$$\Big\{x1\to \frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2-\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),$$

$$x2\to \frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\Big\},$$

$$\Big\{x1\to \frac{1}{4}\left(4-2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2+\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),$$

$$x2\to \frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\Big\},$$

$$\Big\{x1\to \frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2+\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),$$

$$x2\to \frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\Big\}\Big\}$$

```
sol = Select[sol1, ! FreeQ[u /. #, u] &]
```

$$\left\{\left\{x1\to\frac{1}{4}\left(4-2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2-\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),\; x2\to\frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\right\},\right.$$
$$\left\{x1\to\frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2-\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),\; x2\to\frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\right\},$$
$$\left\{x1\to\frac{1}{4}\left(4-2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2+\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),\; x2\to\frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\right\},$$
$$\left.\left\{x1\to\frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{2}\sqrt{3-2u+u^2+\sqrt{5-4u+6u^2-4u^3+u^4}}\right),\; x2\to\frac{-1+x1-2u\,x1+2x1^2+u\,x1^2-x1^3}{-1+u}\right\}\right\}$$

```
whcon //. sol // Simplify
```

{0, 0, 0, 0}

■ Weitere Aufgabenstellungen

■ Elimination von Variablen

```
glsys = {2 x + 3 y + z == a, x - y - z == b, 3 x + y + 7 z == c};
```

```
Eliminate[glsys, z]
```

b == -a + 3 x + 2 y && 11 x == 7 a - c - 20 y

```
Solve[%, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{19}(3a+10b+c),\; y\to\frac{1}{38}(10a-11b-3c)\right\}\right\}$$

Eine Aufgabe aus der holländischen Mathematikolympiade (Quelle [Heck 1993]):
Wie groß ist $a^4 + b^4 + c^4$, wenn *a*,*b* und *c* reelle Zahlen sind und folgende Annahmen gelten:
$a + b + c == 3,\; a^2 + b^2 + c^2 == 9$ sowie $a^3 + b^3 + c^3 == 24$.

```
glsys = {a + b + c == 3, a^2 + b^2 + c^2 == 9, a^3 + b^3 + c^3 == 24};
sum = a^4 + b^4 + c^4;
```

Solve produziert zwar riesige, aber von *Mathematica* leicht zu verarbeitende Menge von Wurzeltermen.

```
sol = Solve[glsys, {a, b, c}]
sum /. sol // Simplify
```

{69, 69, 69, 69, 69, 69}

Dieser Zugang mit **Reduce** transformiert zunächst in eine logisch gleichwertige Form: a als Nullstellen einer Gleichung vom Grad 3, zu jeder Lösung für a zwei Werte für b als (bereits explizit berechnete) Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 und schließlich zu jedem (a,b) ein aus einer linearen Formel zu berechnender Wert c.

```
red = Reduce[glsys, {a, b, c}]
```

$$\left(a == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\,1\right] \,||\, a == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\,2\right] \,||\, a == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\,3\right]\right)\ \&\&$$
$$\left(b == \frac{1}{2}\left(3 - a - \sqrt{3}\,\sqrt{3 + 2\,a - a^2}\right) \,||\, b == \frac{1}{2}\left(3 - a + \sqrt{3}\,\sqrt{3 + 2\,a - a^2}\right)\right)\ \&\&\ c == 3 - a - b$$

Ein nachgeschaltetes Solve liefert eine Lösung in

```
sol = Solve[red, {a, b, c}]
sum /. sol // Simplify
```

{69, 69, 69, 69, 69, 69}

Das geht dagegen (noch) nicht.

```
FullSimplify[sum, red]
```

$a^4 + b^4 + c^4$

```
sol = NSolve[glsys, {a, b, c}];
sum /. sol
```

{69., 69., 69., 69., 69., 69.}

Das sollte so eigentlich gar nicht gehen, denn die angegebene Lösung gilt nicht für beliebige Werte von (a,b,c), sondern nur für 6 spezielle Tripel.

```
sys = Append[glsys, x == sum]
Solve[sys, x]
```

$\{a + b + c == 3,\ a^2 + b^2 + c^2 == 9,\ a^3 + b^3 + c^3 == 24,\ x == a^4 + b^4 + c^4\}$

$\{\{x \to 69\}, \{x \to 69\}, \{x \to 69\}, \{x \to 69\}, \{x \to 69\}, \{x \to 69\}\}$

```
% // Union
```

$\{\{x \to 69\}\}$

Auch das sollte eine leere Lösungsmenge ergeben.

```
Reduce[sys, x]
Solve[%, x]
```

$$\left(c == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\ 1\right] \mid\mid c == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\ 2\right] \mid\mid c == \text{Root}\left[1 - 3\,\#1^2 + \#1^3\,\&,\ 3\right]\right) \&\& \left(b == \frac{1}{2}\left(3 - c - \sqrt{3}\,\sqrt{3 + 2\,c - c^2}\right) \mid\mid b == \frac{1}{2}\left(3 - c + \sqrt{3}\,\sqrt{3 + 2\,c - c^2}\right)\right) \&\&\ a == 3 - b - c\ \&\&\ x == 69$$

{{x → 69}}

Einzig diese (äquivalenten) Kommandos reagieren "wie es im Buche steht".

```
Solve[sys, x, {a, b, c}]
```

{{x → 69}}

```
Eliminate[sys, {a, b, c}]
```

x == 69

■ Nullstellen zählen

```
p = x^5 - 5 x + 1;
CountRoots[p, x]
NSolve[p == 0, x]
```

3

{{x → -1.54165}, {x → -0.0494564 - 1.49944 i}, {x → -0.0494564 + 1.49944 i}, {x → 0.200064}, {x → 1.4405}}

```
RootIntervals[p, Reals]
```

{{{-2, 0}, {0, 1}, {1, 3}}, {{1}, {1}, {1}}}

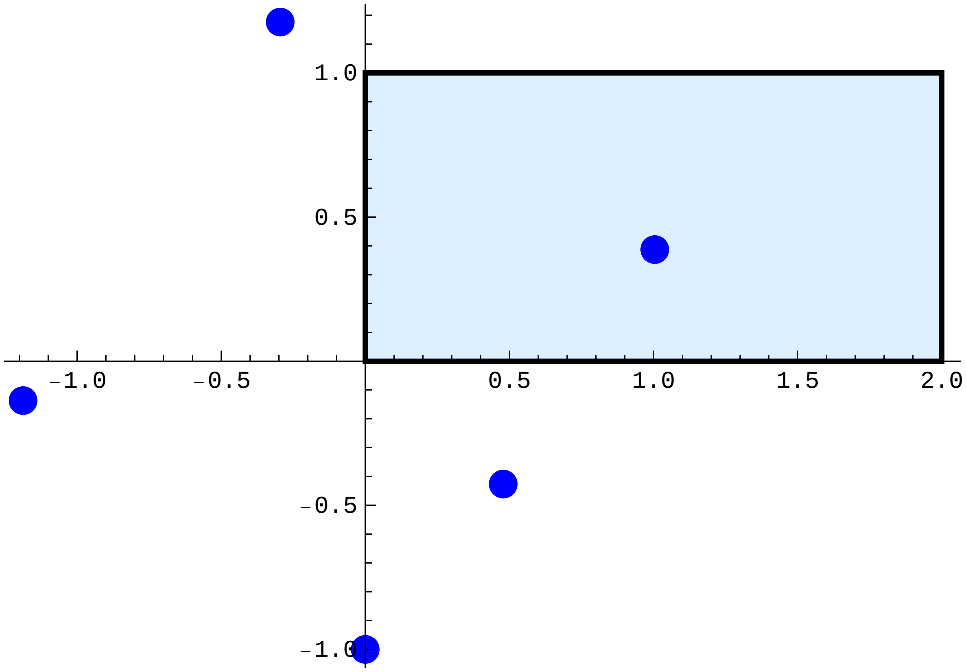
```
RootIntervals[p, Complexes]
```

{{{-2, 0}, {0, 1}, {1, 3}, {-4 - 4 i, 4}, {-4, 4 + 4 i}}, {{1}, {1}, {1}, {1}, {1}}}

```
p = x^5 - (1 + I) x + 1;
CountRoots[p, {x, 0, I + 5}]
```

1

```
sol = NSolve[p == 0, x];
u = Point[{Re[#], Im[#]}] & /@ (x /. sol);
v = Polygon[{{0, 0}, {2, 0}, {2, 1}, {0, 1}, {0, 0}}];
Graphics[{{EdgeForm[Thick], LightBlue, v}, {Blue, PointSize[0.03], u}}, Axes → True]
```



Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Die frühere Verwendung von **InequalitySolve** wird in der Version 6 vollständig von der Funktionalität des Kommandos **Reduce** abgedeckt. Mit algebraischen Ungleichungen und Ungleichungssystemen kommt **Reduce** dabei ganz gut zurecht.

```
Reduce[Abs[x] < 1, x]
```

$-1 < \mathrm{Re}[x] < 1 \,\&\&\, -\sqrt{1 - \mathrm{Re}[x]^2} < \mathrm{Im}[x] < \sqrt{1 - \mathrm{Re}[x]^2}$

```
Reduce[Abs[x] < 1, x, Reals]
```

$-1 < x < 1$

```
Reduce[Abs[x] < 1 && x ∈ Reals, x]
```

$-1 < x < 1$

```
Reduce[x^2 + x > 2, x]
```

$x < -2 \,||\, x > 1$

```
Reduce[x + y ≥ 5 && 2 x - y ≤ 1, {x, y}]
```

$(x \le 2 \,\&\&\, y \ge 5 - x) \,||\, (x > 2 \,\&\&\, y \ge -1 + 2x)$

```
polys = {y^2 + x, x^2 + y};
vars = {x, y};
Reduce[# > 2 & /@ polys , vars]
```

$$\left(x \le -2 \,\&\&\, \left(2 - x^2 < y < -\sqrt{2-x} \,||\, y > \sqrt{2-x}\right)\right) \,||\, \left(-2 < x < \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \,\&\&\, y > \sqrt{2-x}\right) \,||\, \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \le x \le 1 \,\&\&\, y > 2 - x^2\right) \,||\, \left(1 < x \le \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \,\&\&\, y > \sqrt{2-x}\right) \,||\, \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) < x \le 2 \,\&\&\, \left(2 - x^2 < y < -\sqrt{2-x} \,||\, y > \sqrt{2-x}\right)\right) \,||\, \left(x > 2 \,\&\&\, y > 2 - x^2\right)$$

```
gb = GroebnerBasis[# - 2 & /@ polys, {y, x}]
```

$$\left\{2 + x - 4\,x^2 + x^4,\ -2 + x^2 + y\right\}$$

```
Solve[gb[[1]] == 0, x]
```

$$\left\{\{x \to -2\},\ \{x \to 1\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

```
CylindricalDecomposition[# > 2 & /@ polys , vars]
```

$$\left(x \le -2 \,\&\&\, \left(2 - x^2 < y < -\sqrt{2-x} \,||\, y > \sqrt{2-x}\right)\right) \,||\, \left(-2 < x < \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \,\&\&\, y > \sqrt{2-x}\right) \,||\, \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \le x \le 1 \,\&\&\, y > 2 - x^2\right) \,||\, \left(1 < x \le \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \,\&\&\, y > \sqrt{2-x}\right) \,||\, \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) < x \le 2 \,\&\&\, \left(2 - x^2 < y < -\sqrt{2-x} \,||\, y > \sqrt{2-x}\right)\right) \,||\, \left(x > 2 \,\&\&\, y > 2 - x^2\right)$$

```
polys = {y^3 + x, x^2 + y};
Reduce[# > 2 & /@ polys , vars]
```

$$\left(x \le \mathrm{Root}\left[6 + 7\,\#1 - 5\,\#1^2 - 5\,\#1^3 + \#1^4 + \#1^5\,\&,\ 1\right] \,\&\&\, y > \mathrm{Root}\left[-2 + x + \#1^3\,\&,\ 1\right]\right) \,||\, \left(\mathrm{Root}\left[6 + 7\,\#1 - 5\,\#1^2 - 5\,\#1^3 + \#1^4 + \#1^5\,\&,\ 1\right] < x \le 1 \,\&\&\, y > 2 - x^2\right) \,||\, \left(x > 1 \,\&\&\, y > \mathrm{Root}\left[-2 + x + \#1^3\,\&,\ 1\right]\right)$$

```
gb = GroebnerBasis[# - 2 & /@ polys, {y, x}]
```

$$\left\{-6 - x + 12\,x^2 - 6\,x^4 + x^6,\ -2 + x^2 + y\right\}$$

```
RootIntervals[gb[[1]], Reals]
```

```
{{{-1, 0}, {1, 1}}, {{1}, {1}}}
```

Mit trigonometrischen Ungleichungen und anderen komplizierteren Fragen kann **Reduce** dagegen oft (noch) nichts anfangen.

```
Reduce[Sin[x] ≥ 1/2, x]
```

Reduce::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to Reduce.

$\text{Reduce}\left[\text{Sin}[x] \geq \frac{1}{2}, x\right]$

```
Reduce[Cos[x] > 0, x]
```

Reduce::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to Reduce.

$\text{Reduce}[\text{Cos}[x] > 0, x]$

```
Reduce[Tan[x] > 1, x]
```

$\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} \notin \text{Integers} \,\&\&\, C[1] \in \text{Integers} \,\&\&\, \frac{1}{4}(\pi + 4\pi C[1]) < x < \frac{1}{2}(\pi + 2\pi C[1])$

Gleichungen über anderen Grundbereichen lösen

Gleichungen über den reellen Zahlen

Nach den Ausführungen im vorigen Punkt ist klar, dass **Reduce** in der Lage ist, die reellen Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen zu finden.

```
polys = {y^3 + x == 1, x^2 + y == 1};
red = Reduce[polys, {x, y}, Reals]
```

$\left(x == 1 \,||\, x == 0 \,||\, x == \text{Root}\left[1 - 2\,\#1 - 2\,\#1^2 + \#1^3 + \#1^4\,\&, 1\right] \,||\, x == \text{Root}\left[1 - 2\,\#1 - 2\,\#1^2 + \#1^3 + \#1^4\,\&, 2\right]\right) \,\&\&\, y == 1 - x^2$

```
NSolve[polys, {x, y}]
```

{{x → 1.28879, y → -0.660993}, {x → -1.33909 + 0.44663 ⅈ, y → -0.593691 + 1.19616 ⅈ},
{x → -1.33909 - 0.44663 ⅈ, y → -0.593691 - 1.19616 ⅈ},
{x → 1., y → 0.}, {x → 0., y → 1.}, {x → 0.389391, y → 0.848375}}

```
gb = GroebnerBasis[polys, {y, x}]
```

$\{-x + 3x^2 - 3x^4 + x^6, -1 + x^2 + y\}$

```
Factor[gb[[1]]]
```

$(-1 + x)\,x\,(1 - 2x - 2x^2 + x^3 + x^4)$

```
CountRoots[1 - 2 x - 2 x^2 + x^3 + x^4, x]
```

2

```
sol = {red // ToRules}
```

$\{\{x \to 1,\ y \to 1 - x^2\},\ \{x \to 0,\ y \to 1 - x^2\},\ \{x \to \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 1],\ y \to 1 - x^2\},$
$\{x \to \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 2],\ y \to 1 - x^2\}\}$

```
polys //. sol // Expand
```

$\{\{\text{True}, \text{True}\}, \{\text{True}, \text{True}\},$
$\{1 + \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 1] - 3\,\text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 1]^2 +$
$3\,\text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 1]^4 - \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 1]^6 == 1, \text{True}\},$
$\{1 + \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 2] - 3\,\text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 2]^2 +$
$3\,\text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 2]^4 - \text{Root}[1 - 2\#1 - 2\#1^2 + \#1^3 + \#1^4 \&, 2]^6 == 1, \text{True}\}\}$

```
% // RootReduce
```

{{True, True}, {True, True}, {True, True}, {True, True}}

Zwei Einheitskreise mit Mittenabstand u schneiden sich.

```
Clear[x, y, u]
polys = {x^2 + y^2 == 1, (x - u)^2 + y^2 == 1};
Reduce[polys, {x, y}, Reals]
```

$$\left(-2 \le u < 0 \,\&\&\, x == \frac{u}{2} \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\right) \;||$$
$$\left(u == 0 \,\&\&\, -1 \le x \le 1 \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{1 - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - x^2}\right)\right) \;||$$
$$\left(0 < u \le 2 \,\&\&\, x == \frac{u}{2} \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\right)$$

Dasselbe mit variablen Radien.

```
polys = {x^2 + y^2 == r1^2, (x - u)^2 + y^2 == r2^2};
Reduce[Join[polys, {u > 0, r1 > 0, r2 > 0}], {x, y}, Reals]
```

$$u > 0 \,\&\&\, \Bigg(\Bigg(0 < r2 < u \,\&\&\, -r2 + u \le r1 \le r2 + u \,\&\&$$
$$x == \frac{r1^2 - r2^2 + u^2}{2\,u} \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Bigg) \;||$$
$$\Bigg(r2 == u \,\&\&\, -r2 + u < r1 \le r2 + u \,\&\&\, x == \frac{r1^2 - r2^2 + u^2}{2\,u} \,\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Bigg) \;||\; \Bigg(r2 > u \,\&\&\, r2 - u \le r1 \le r2 + u \,\&\&$$
$$x == \frac{r1^2 - r2^2 + u^2}{2\,u} \,\&\&\, \left(y == -\sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Bigg)\Bigg)$$

```
Reduce[Join[polys, {u > 0, r1 > r2 > 0}], {x, y}, Reals]
```

$$r2 > 0 \&\& r1 > r2 \&\& r1 - r2 \le u \le r1 + r2 \&\& x == \frac{r1^2 - r2^2 + u^2}{2\,u} \&\& \left(y == -\sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{r2^2 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)$$

```
polys = {x^4 + y^4 == 1, (x - u)^2 + y^2 == 1};
Reduce[polys, {x, y}, Reals]
```

$$\Big(-2 \le u < \text{Root}[2 - 18\,\#1^2 + 10\,\#1^4 - 6\,\#1^6 + \#1^8\,\&, 2] \;\&\&$$
$$x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 1] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$
$$\Big(u == \text{Root}[2 - 18\,\#1^2 + 10\,\#1^4 - 6\,\#1^6 + \#1^8\,\&, 2] \;\&\&$$
$$\Big(\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 1] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$
$$\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 3] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big)\Big)\Big) \;||$$
$$\Big(\text{Root}[2 - 18\,\#1^2 + 10\,\#1^4 - 6\,\#1^6 + \#1^8\,\&, 2] < u < 0 \;\&\&$$
$$\Big(\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 1] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$
$$\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 2] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$
$$\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 3] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big)\Big)\Big) \;||$$
$$\Big(u == 0 \;\&\&\; \Big((x == -1 \;\&\&\; y == 0) \;||\; \Big(x == 0 \;\&\&\; \left(y == -1 \;||\; y == 1\right)\Big) \;||\; (x == 1 \;\&\&\; y == 0)\Big)\Big) \;||$$
$$\Big(0 < u < \text{Root}[2 - 18\,\#1^2 + 10\,\#1^4 - 6\,\#1^6 + \#1^8\,\&, 3] \;\&\&$$
$$\Big(\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 2] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$
$$\Big(x == \text{Root}[-2\,u^2 + u^4 + (4\,u - 4\,u^3)\,\#1 + (-2 + 6\,u^2)\,\#1^2 - 4\,u\,\#1^3 + 2\,\#1^4\,\&, 3] \;\&\&$$
$$\left(y == -\sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2} \;||\; y == \sqrt{1 - u^2 + 2\,u\,x - x^2}\right)\Big) \;||$$

```
      (x == Root[-2 u^2 + u^4 + (4 u - 4 u^3) #1 + (-2 + 6 u^2) #1^2 - 4 u #1^3 + 2 #1^4 &, 4] &&
        (y == -Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2] || y == Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2])))) ||
  (u == Root[2 - 18 #1^2 + 10 #1^4 - 6 #1^6 + #1^8 &, 3] &&
    ((x == Root[-2 u^2 + u^4 + (4 u - 4 u^3) #1 + (-2 + 6 u^2) #1^2 - 4 u #1^3 + 2 #1^4 &, 2] &&
        (y == -Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2] || y == Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2])) ||
      (x == Root[-2 u^2 + u^4 + (4 u - 4 u^3) #1 + (-2 + 6 u^2) #1^2 - 4 u #1^3 + 2 #1^4 &, 3] &&
        (y == -Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2] || y == Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2])))) ||
  (Root[2 - 18 #1^2 + 10 #1^4 - 6 #1^6 + #1^8 &, 3] < u ≤ 2 &&
    x == Root[-2 u^2 + u^4 + (4 u - 4 u^3) #1 + (-2 + 6 u^2) #1^2 - 4 u #1^3 + 2 #1^4 &, 2] &&
    (y == -Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2] || y == Sqrt[1 - u^2 + 2 u x - x^2]))
```

```
CountRoots[2 - 18 x^2 + 10 x^4 - 6 x^6 + x^8, {x, -2, 0}]
```

```
1
```

```
Root[2 - 18 #1^2 + 10 #1^4 - 6 #1^6 + #1^8 &, 2] // N
```

```
-0.344022
```

```
Table[{Reduce[polys /. u -> i, {x, y}, Reals] // ToRules} // Length, {i, -1/2, 1/2, 1/10}]
```

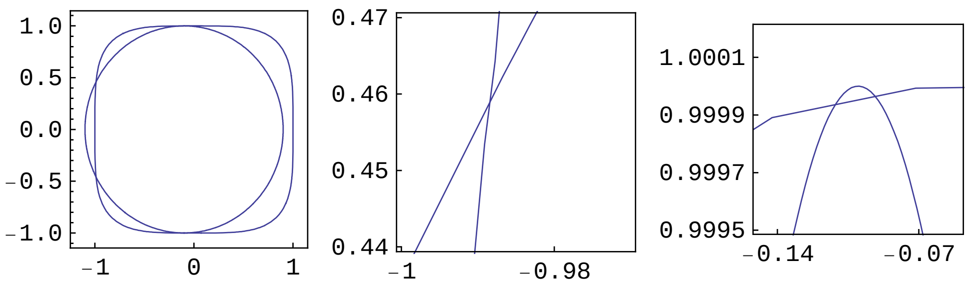
```
{2, 2, 6, 6, 6, 4, 6, 6, 6, 2, 2}
```

```
NSolve[polys /. u → -.1, {x, y}]
```

```
{{x → -0.98878, y → 0.458334}, {x → -0.108293, y → 0.999966},
 {x → -0.093781, y → 0.999981}, {x → -0.093781, y → -0.999981},
 {x → -0.108293, y → -0.999966}, {x → 0.990854, y → 0. - 0.435847 i},
 {x → 0.990854, y → 0. + 0.435847 i}, {x → -0.98878, y → -0.458334}}
```

```
c = ContourPlot[x^4 + y^4 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}];
d[u_] := ParametricPlot[{u + Sin[a], Cos[a]}, {a, -π, π}];
```

```
u1 = Show[{c, d[-0.1]}, PlotRange -> {{-1.2, 1.1}, {-1.1, 1.1}},
   FrameTicks -> {{Automatic, None}, {{-1, 0, 1}, None}}];
u2 = Show[{c, d[-0.1]}, PlotRange -> {{-1, -0.97}, {0.44, 0.47}},
   FrameTicks -> {{{0.44, 0.45, 0.46, 0.47}, None}, {{-1, -.98}, None}}];
u3 = Show[{c, d[-0.1]}, PlotRange -> {{-.15, -0.05}, {.9995, 1.0002}},
   FrameTicks -> {{{0.9995, 0.9997, 0.9999, 1.0001}, None}, {{-.14, -.07}, None}}];
GraphicsGrid[{{u1, u2, u3}}]
```




```
Animate[Show[{c, d[u]}, PlotRange -> {{-2, 2}, {-1, 1}}, AspectRatio -> 1 / 2],
 {u, -1, 1}, DefaultDuration -> 10, AnimationDirection -> ForwardBackward]
```

Noch einmal die Sache mit den Winkelhalbierenden.

```
Clear[u, x1, x2];
```

whpolys = $\{4 - 4\,x1 + x1^2 - 8\,x2 + 4\,u\,x2 + 4\,x1\,x2 - 2\,u\,x1\,x2 - x2^2,\ 2 + 2\,u^2 - 2\,x1 - 2\,u^2\,x1 - 2\,x1^2 + 2\,u\,x1^2 - 4\,x2 + 2\,u\,x2 - 4\,u^2\,x2 + 2\,u^3\,x2 + 2\,x1\,x2 + 4\,u\,x1\,x2 - 2\,u^2\,x1\,x2 + 2\,x2^2 - 2\,u\,x2^2\}$;

whcon = $x1^2 - 2\,u\,x1\,x2 - x2^2$;

```
red = Reduce[whpolys == 0, {x1, x2}]
```

$$\Bigg(\Big(u == 2 - i \;||\; u == 2 + i\Big) \;\&\&$$
$$\Bigg(x2 == \frac{1}{2}\left(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1 - \sqrt{(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1)^2 + 4\left(4 - 4x1 + x1^2\right)}\right) \;||$$
$$x2 == \frac{1}{2}\left(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1 + \sqrt{(-8 + 4u + 4x1 - 2u\,x1)^2 + 4\left(4 - 4x1 + x1^2\right)}\right)\Bigg)\Bigg) \;||$$
$$\left(u == 1 \;\&\&\; x1 == 1 \;\&\&\; \left(x2 == -1 - \sqrt{2} \;||\; x2 == -1 + \sqrt{2}\right)\right) \;||$$
$$\left(u == 1 \;\&\&\; \left(x1 == 1 - \sqrt{2} \;||\; x1 == 1 + \sqrt{2}\right) \;\&\&\; x2 == 1\right) \;||$$
$$\Bigg(5 - 4u + u^2 \neq 0 \;\&\&\; \Bigg(x1 == \frac{1}{4}\left(4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 - \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$
$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 - \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$
$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 + \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right) \;||$$
$$x1 == \frac{1}{4}\left(4 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - 2u + u^2 + \sqrt{5 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4}}\right)\Bigg) \;\&\&$$
$$-1 + u \neq 0 \;\&\&\; x2 == \frac{-1 + x1 - 2u\,x1 + 2x1^2 + u\,x1^2 - x1^3}{-1 + u}\Bigg)$$

```
red = Reduce[whpolys == 0, {x1, x2}, Reals]
```

```
(u < 1 &&
   ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] && x2 == -4 + 2 u + 2 x1 -
        u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]))) ||
 (u == 1 && ((x1 == 1 - Sqrt[2] && x2 == -1 - Sqrt[2] + Sqrt[8 - 8 (1 - Sqrt[2]) + 2 (1 - Sqrt[2])^2]) ||
     (x1 == 1 && (x2 == -1 - Sqrt[2] || x2 == -1 + Sqrt[2])) ||
     (x1 == 1 + Sqrt[2] && x2 == -1 + Sqrt[2] + Sqrt[8 - 8 (1 + Sqrt[2]) + 2 (1 + Sqrt[2])^2]))) ||
 (u > 1 && ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
     (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] && x2 == -4 +
        2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2])))
```

```
red = Reduce[whpolys == 0 && u < 1, {x1, x2}, Reals]
```

```
u < 1 &&
 ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] && x2 == -4 + 2 u + 2 x1 -
      u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
   (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
   (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
   (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]))
```

```
sol = {red // ToRules}
```

```
{ToRules[u < 1 && x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] &&
    x2 == -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]],
 ToRules[u < 1 && x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] &&
    x2 == -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]],
 ToRules[u < 1 && x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] &&
    x2 == -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]],
 ToRules[u < 1 && x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] &&
    x2 == -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]]}
```

```
sol = {red[[2]] // ToRules}
```

```
{{x1 -> Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1],
  x2 -> -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]},
 {x1 -> Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2],
  x2 -> -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]},
 {x1 -> Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3],
  x2 -> -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]},
 {x1 -> Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4],
  x2 -> -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]}}
```

```
whcon //. sol // FullSimplify
```

```
{4 (-9 - u (-8 + 2 u + √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2)) + 2
      √((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2) +
     (9 + (-6 + u) u - √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2))
      Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] +
     (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1]^2),
 4 (-9 - u (-8 + 2 u + √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2)) + 2
      √((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2) +
     (9 + (-6 + u) u - √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2))
      Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
     (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]^2),
 4 (-9 + u (8 - 2 u + √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2)) - 2
      √((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2) +
     (9 + (-6 + u) u + √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2))
      Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
     (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3]^2),
 4 (-9 - u (-8 + 2 u + √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2)) + 2
      √((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2) +
     (9 + (-6 + u) u - √((5 + (-4 + u) u)
            (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2))
      Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
     (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]^2)}
```

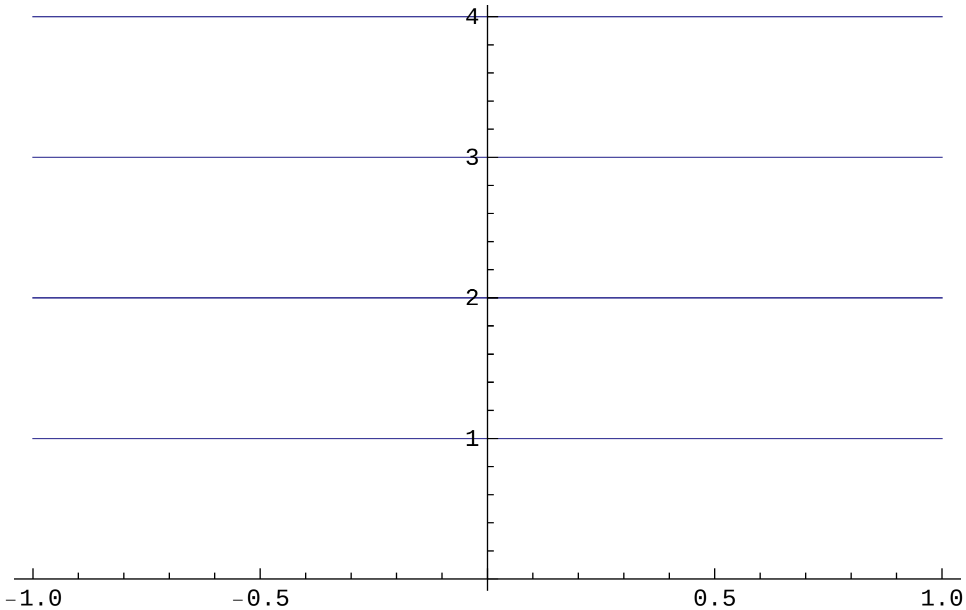
```
res = FullSimplify[whcon //. sol, u < 1]
```

```
{4 (-9 - u (-8 + 2 u + Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2)]) + 2
     Sqrt[((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2)] +
    (9 + (-6 + u) u - Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1])^2)])
     Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] +
    (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1]^2),
 4 (-9 - u (-8 + 2 u + Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2)]) + 2
     Sqrt[((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2)] +
    (9 + (-6 + u) u - Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2])^2)])
     Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
    (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]^2),
 4 (-9 + u (8 - 2 u + Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2)]) - 2
     Sqrt[((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2)] +
    (9 + (-6 + u) u + Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3])^2)])
     Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
    (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3]^2),
 4 (-9 - u (-8 + 2 u + Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2)]) + 2
     Sqrt[((5 + (-4 + u) u) (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2)] +
    (9 + (-6 + u) u - Sqrt[((5 + (-4 + u) u)
        (-2 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4])^2)])
     Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
    (-2 + u) Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]^2)}
```

```
res /. u -> 0.3
```

$\{-8.88178\times10^{-15}, -2.66454\times10^{-15}, 7.10543\times10^{-15}, 1.42109\times10^{-14}\}$

Plot[res + {1, 2, 3, 4}, {u, -1, 1}, AxesOrigin -> {0, 0}]



gb = GroebnerBasis[whpolys, {x2, x1}, CoefficientDomain → RationalFunctions]

$\{1 + (-2 + 4\,u - 2\,u^2)\,x1 + (-3 - 2\,u + u^2)\,x1^2 + 4\,x1^3 - x1^4,$
$1 + (-1 + 2\,u)\,x1 + (-2 - u)\,x1^2 + x1^3 + (-1 + u)\,x2\}$

red = Reduce[gb == 0 && u < 1, {x1, x2}, Reals]

u < 1 && (x1 == Root[$-1 + (2 - 4\,u + 2\,u^2)\,\#1 + (3 + 2\,u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4$ &, 1] ||

x1 == Root[$-1 + (2 - 4\,u + 2\,u^2)\,\#1 + (3 + 2\,u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4$ &, 2] ||

x1 == Root[$-1 + (2 - 4\,u + 2\,u^2)\,\#1 + (3 + 2\,u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4$ &, 3] ||

x1 == Root[$-1 + (2 - 4\,u + 2\,u^2)\,\#1 + (3 + 2\,u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4$ &, 4]) &&

$$x2 == \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}$$

```
sol = {red⟦2⟧ && red⟦3⟧ // ToRules}
whcon //. sol // Simplify
```

$$\left\{\left\{x1 \to \text{Root}\left[-1 + \left(2 - 4\,u + 2\,u^2\right) \#1 + \left(3 + 2\,u - u^2\right) \#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\,1\right],\right.\right.$$
$$\left. x2 \to \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}\right\},$$
$$\left\{x1 \to \text{Root}\left[-1 + \left(2 - 4\,u + 2\,u^2\right) \#1 + \left(3 + 2\,u - u^2\right) \#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\,2\right],\right.$$
$$\left. x2 \to \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}\right\},$$
$$\left\{x1 \to \text{Root}\left[-1 + \left(2 - 4\,u + 2\,u^2\right) \#1 + \left(3 + 2\,u - u^2\right) \#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\,3\right],\right.$$
$$\left. x2 \to \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}\right\},$$
$$\left\{x1 \to \text{Root}\left[-1 + \left(2 - 4\,u + 2\,u^2\right) \#1 + \left(3 + 2\,u - u^2\right) \#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\,4\right],\right.$$
$$\left.\left. x2 \to \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}\right\}\right\}$$

```
{0, 0, 0, 0}
```

Rationale und ganzzahlige Lösungen

Reduce findet auch ganzzahlige Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen, hier etwa von linearen diophantischen Gleichungen.

```
red = Reduce[2 x + 3 y == 5, {x, y}, Integers]
```

```
C[1] ∈ Integers && x == 1 + 3 C[1] && y == 1 - 2 C[1]
```

```
Simplify[2 x + 3 y, red]
```

```
5
```

```
Reduce[red && -3 < x < 3, {x, y}, Integers]
```

```
(C[1] == -1 && x == -2 && y == 3) || (C[1] == 0 && x == 1 && y == 1)
```

```
{Reduce[2 x + 3 y == 5 && -3 < x < 3, {x, y}, Integers] // ToRules}
```

```
{{x → -2, y → 3}, {x → 1, y → 1}}
```

Der Unterschied zwischen gebundenen und ungebundenen Variablen ist *Mathematica* noch nicht sehr geläufig.

```
red = Reduce[6 x + 10 y + 15 z == 11, {x, y, z}, Integers]
```

```
(C[1] | C[2]) ∈ Integers && x == 1 + 5 C[1] && y == -1 + 3 C[2] && z == 1 - 2 C[1] - 2 C[2]
```

```
Reduce[red && -3 < x < 3]
```

```
C[1] == 0 && z == 1 - 2 C[2] && y == -1 + 3 C[2] && x == 1
```

```
Reduce[red && -3 < x < 3, Integers]
```

```
(C[3] | C[4]) ∈ Integers && C[3] ≥ 0 && C[4] ≥ 0 &&
 ((x == 1 && C[1] == 0 && y == -1 + 3 C[3] - 3 C[4] && z == 1 - 2 C[3] + 2 C[4] && C[2] == C[3] - C[4]) ||
  (x == 1 && C[1] == 0 && y == 2 + 3 C[3] - 3 C[4] &&
    z == -1 - 2 C[3] + 2 C[4] && C[2] == 1 + C[3] - C[4]))
```

```
Reduce[6 x + 10 y + 15 z == 11 && -3 < x < 3, {x, y, z}, Integers] ■
```

```
■ ((C[1] | C[2]) ∈ Integers && C[1] ≥ 0 &&
  C[2] ≥ 0 && ((x == 1 && y == 2 + 3 C[1] - 3 C[2] && z == -1 - 2 C[1] + 2 C[2]) ||
    (x == 1 && y == -1 + 3 C[1] - 3 C[2] && z == 1 - 2 C[1] + 2 C[2])))
```

```
sys = 6 x + 10 y + 15 z == 11 && Abs[#] < 10 & /@ {x, y, z};
sol = FindInstance[sys, {x, y, z}, Integers, 100]
```

```
{{x → -9, y → -7, z → 9}, {x → -9, y → -4, z → 7}, {x → -9, y → -1, z → 5},
 {x → -4, y → -7, z → 7}, {x → -4, y → -4, z → 5}, {x → -4, y → -1, z → 3},
 {x → -9, y → 8, z → -1}, {x → -4, y → 5, z → -1}, {x → -4, y → 8, z → -3},
 {x → -9, y → 2, z → 3}, {x → -9, y → 5, z → 1}, {x → -4, y → 2, z → 1},
 {x → 6, y → -1, z → -1}, {x → 1, y → -7, z → 5}, {x → 1, y → -4, z → 3}, {x → 1, y → -1, z → 1},
 {x → 6, y → -7, z → 3}, {x → 6, y → -4, z → 1}, {x → 1, y → 2, z → -1}, {x → 1, y → 5, z → -3},
 {x → 1, y → 8, z → -5}, {x → 6, y → 2, z → -3}, {x → 6, y → 5, z → -5}, {x → 6, y → 8, z → -7}}
```

```
sol // Length
```

```
24
```

```
Reduce[sys, {x, y, z}, Integers]
```

```
(x == -9 && y == -7 && z == 9) || (x == -9 && y == -4 && z == 7) || (x == -9 && y == -1 && z == 5) ||
 (x == -9 && y == 2 && z == 3) || (x == -9 && y == 5 && z == 1) || (x == -9 && y == 8 && z == -1) ||
 (x == -4 && y == -7 && z == 7) || (x == -4 && y == -4 && z == 5) || (x == -4 && y == -1 && z == 3) ||
 (x == -4 && y == 2 && z == 1) || (x == -4 && y == 5 && z == -1) || (x == -4 && y == 8 && z == -3) ||
 (x == 1 && y == -7 && z == 5) || (x == 1 && y == -4 && z == 3) || (x == 1 && y == -1 && z == 1) ||
 (x == 1 && y == 2 && z == -1) || (x == 1 && y == 5 && z == -3) || (x == 1 && y == 8 && z == -5) ||
 (x == 6 && y == -7 && z == 3) || (x == 6 && y == -4 && z == 1) || (x == 6 && y == -1 && z == -1) ||
 (x == 6 && y == 2 && z == -3) || (x == 6 && y == 5 && z == -5) || (x == 6 && y == 8 && z == -7)
```

Noch einfacher ist es in diesem Beispiel mit rationalen Lösungen − dazu müssen einfach die **Root**−Ausdrücke aussortiert werden.

```
polys = {y^3 + x == 1, x^2 + y == 1};
Reduce[polys , {x, y}, Rationals]
```

```
(x == 0 && y == 1) || (x == 1 && y == 0)
```

```
polys = {z^2 + x + y - 3, y^2 + x + z - 3, x^2 + y + z - 3};
vars = {x, y, z};
Solve[Reduce[polys == 0 , vars, Integers], vars]
```

```
{{x → -3, y → -3, z → -3}, {x → 1, y → 1, z → 1}}
```

Und nun noch einmal unser Beispiel mit den Winkelhalbierenden.

```
Clear[u, x1, x2];
whpolys = {4 - 4 x1 + x1^2 - 8 x2 + 4 u x2 + 4 x1 x2 - 2 u x1 x2 - x2^2, 2 + 2 u^2 - 2 x1 - 2 u^2 x1 - 2 x1^2 +
    2 u x1^2 - 4 x2 + 2 u x2 - 4 u^2 x2 + 2 u^3 x2 + 2 x1 x2 + 4 u x1 x2 - 2 u^2 x1 x2 + 2 x2^2 - 2 u x2^2};
whcon = x1^2 - 2 u x1 x2 - x2^2;
gb = GroebnerBasis[whpolys, {x2, x1}, CoefficientDomain → RationalFunctions];
```

Es passiert nix außer Backsubstitution und Ergänzung einer Rationals−Klausel.

```
Reduce[whpolys == 0 && u < 1, {x1, x2}, Reals]
```

```
u < 1 &&
 ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] && x2 == -4 + 2 u + 2 x1 -
      u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 - Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] && x2 ==
     -4 + 2 u + 2 x1 - u x1 + Sqrt[20 - 16 u + 4 u^2 - 20 x1 + 16 u x1 - 4 u^2 x1 + 5 x1^2 - 4 u x1^2 + u^2 x1^2]))
```

```
Reduce[whpolys == 0 && u < 1, {x1, x2}, Rationals]
```

```
(u | x1 | x2) ∈ Rationals && u < 1 &&
 ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] &&
     x2 == -4 + 2 u + 2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] -
```

```
      u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] +
      √(20 - 16 u + 4 u^2 - 20 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] +
         16 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] -
         4 u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1] +
         5 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1]^2 -
         4 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1]^2 +
         u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 1]^2)) ||
(x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] &&
  x2 == -4 + 2 u + 2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] -
      u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
      √(20 - 16 u + 4 u^2 - 20 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
         16 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] -
         4 u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2] +
         5 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]^2 -
         4 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]^2 +
         u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 2]^2)) ||
(x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] &&
  x2 == -4 + 2 u + 2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] -
      u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] -
      √(20 - 16 u + 4 u^2 - 20 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
         16 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] -
         4 u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3] +
         5 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3]^2 -
         4 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3]^2 +
         u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 3]^2)) ||
(x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] &&
  x2 == -4 + 2 u + 2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] -
      u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
      √(20 - 16 u + 4 u^2 - 20 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
         16 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] -
         4 u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4] +
         5 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]^2 -
         4 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]^2 +
         u^2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) #1 + (3 + 2 u - u^2) #1^2 - 4 #1^3 + #1^4 &, 4]^2)))
```

Und hier dasselbe.

```
Reduce[gb == 0 && u < 1, {x1, x2}, Reals]
```

$$u < 1 \,\&\&\, \Big(x1 == \mathrm{Root}\big[-1 + (2 - 4u + 2u^2)\,\#1 + (3 + 2u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\ 1\big]\ ||$$

$$x1 == \mathrm{Root}\big[-1 + (2 - 4u + 2u^2)\,\#1 + (3 + 2u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\ 2\big]\ ||$$

$$x1 == \mathrm{Root}\big[-1 + (2 - 4u + 2u^2)\,\#1 + (3 + 2u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\ 3\big]\ ||$$

$$x1 == \mathrm{Root}\big[-1 + (2 - 4u + 2u^2)\,\#1 + (3 + 2u - u^2)\,\#1^2 - 4\,\#1^3 + \#1^4\,\&,\ 4\big]\Big) \,\&\&$$

$$x2 == \frac{1 - x1 + 2\,u\,x1 - 2\,x1^2 - u\,x1^2 + x1^3}{1 - u}$$

```
Reduce[gb == 0 && u < 1, {x1, x2}, Rationals]
```

```
(u | x1 | x2) ∈ Rationals && u < 1 &&
 ((x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1] &&
    x2 == 1/(-1 + u) (-1 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1] -
       2 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1] +
       2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1]^2 +
       u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1]^2 -
       Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 1]^3)) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2] &&
    x2 == 1/(-1 + u) (-1 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2] -
       2 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2] +
       2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2]^2 +
       u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2]^2 -
       Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 2]^3)) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3] &&
    x2 == 1/(-1 + u) (-1 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3] -
       2 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3] +
       2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3]^2 +
       u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3]^2 -
       Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 3]^3)) ||
  (x1 == Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4] &&
    x2 == 1/(-1 + u) (-1 + Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4] -
       2 u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4] +
       2 Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4]^2 +
       u Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4]^2 -
       Root[-1 + (2 - 4 u + 2 u^2) ♯1 + (3 + 2 u - u^2) ♯1^2 - 4 ♯1^3 + ♯1^4 &, 4]^3)))
```

Uber den ganzen Zahlen kommt *Mathematica* zu folgenden Ergebnissen. Beachten Sie, dass **whpolys** und **gb** als Gleichungssysteme nur äquivalent in Q(u)[x1,x2] sind, nicht aber für konkrete Werte des Parameters u.

```
Reduce[whpolys == 0, {x1, x2}, Integers]
```

False

```
Reduce[gb == 0, {x1, x2}, Integers]
```

u == 1 && x1 == 1 && x2 ∈ Integers

```
whpolys /. {u → 1, x1 → 1}
```

$\{1 - 2\,x2 - x2^2,\ 0\}$

```
gb /. {u → 1, x1 → 1}
```

{0, 0}

Lösungen einer Pellschen Gleichung

```
red = Reduce[x^2 - 2 y^2 == 1, {x, y}, Integers]
```

$$\left(C[1] \in \text{Integers} \;\&\&\; C[1] \geq 0 \;\&\&\; x == \frac{1}{2}\left(-\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right) \;\&\&\; y == -\frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\right) \;||$$

$$\left(C[1] \in \text{Integers} \;\&\&\; C[1] \geq 0 \;\&\&\; x == \frac{1}{2}\left(-\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right) \;\&\&\; y == \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\right) \;||$$

$$\left(C[1] \in \text{Integers} \;\&\&\; C[1] \geq 0 \;\&\&\; x == \frac{1}{2}\left(\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right) \;\&\&\; y == -\frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\right) \;|| \;\left(C[1] \in \text{Integers} \;\&\&\; C[1] \geq 0 \;\&\&\; x == \frac{1}{2}\left(\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right) \;\&\&\; y == \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{C[1]} - \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\right)$$

```
Reduce[red && (-5 < x < 5), {x, y}, Integers]
```

Reduce::nsmet : This system cannot be solved with the methods available to Reduce.

$$\text{Reduce}\Big[\Big(\Big(C[1]\in\text{Integers}\,\&\&\,C[1]\geq 0\,\&\&\, x==\frac{1}{2}\left(-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right)\&\&\, y==-\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\Big)\;||$$

$$\Big(C[1]\in\text{Integers}\,\&\&\,C[1]\geq 0\,\&\&\, x==\frac{1}{2}\left(-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right)\&\&\, y==\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\Big)\;||$$

$$\Big(C[1]\in\text{Integers}\,\&\&\,C[1]\geq 0\,\&\&\, x==\frac{1}{2}\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right)\&\&\, y==-\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\Big)\;||$$

$$\Big(C[1]\in\text{Integers}\,\&\&\,C[1]\geq 0\,\&\&\, x==\frac{1}{2}\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}\right)\&\&\, y==\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{C[1]}-\left(3+2\sqrt{2}\right)^{C[1]}}{2\sqrt{2}}\Big)\Big)\;\&\&\,-5<x<5,\;\{x,y\},\;\text{Integers}\Big]$$

```
Reduce[x^2 - 2 y^2 == 1 && 0 < x < 10^3 && 0 < y, {x, y}, Integers]
```

(x == 3 && y == 2) || (x == 17 && y == 12) || (x == 99 && y == 70) || (x == 577 && y == 408)

Gleichungen über Restklassenringen

```
Solve[{x^2 == 4, Modulus == 12}, x]
```

{{Modulus → 12, x → 2}, {Modulus → 12, x → 4}, {Modulus → 12, x → 8}, {Modulus → 12, x → 10}}

```
Reduce[x^2 == 4, x, Modulus → 12]
```

x == 2 || x == 4 || x == 8 || x == 10

```
Solve[x^2 == 3, x, Mode → Modular]
```

$\{\{x\to -\sqrt{3}\},\{x\to \sqrt{3}\}\}$

```
primeList = Select[Range[5, 50], PrimeQ];
sol = {#, Reduce[x^2 == 3, x, Modulus -> #]} & /@ primeList
```

```
{{5, False}, {7, False}, {11, x == 5 || x == 6}, {13, x == 4 || x == 9},
 {17, False}, {19, False}, {23, x == 7 || x == 16}, {29, False}, {31, False},
 {37, x == 15 || x == 22}, {41, False}, {43, False}, {47, x == 12 || x == 35}}
```

```
JacobiSymbol[3, 2]
```

```
-1
```

```
Select[primeList, JacobiSymbol[3, #] == 1 &]
```

```
{11, 13, 23, 37, 47}
```

```
Solve[x^2 == x^4 == 4, x, Mode → Modular]
```

```
{{Modulus → 12, x → 2}, {Modulus → 12, x → 4}, {Modulus → 12, x → 8}, {Modulus → 12, x → 10}}
```

```
polys = {z^2 + x + y - 3, y^2 + x + z - 3, x^2 + y + z - 3};
vars = {x, y, z};
gb = GroebnerBasis[polys, vars]
```

$\{-6 - 8 z + 19 z^2 + 4 z^3 - 10 z^4 + z^6,\ 6 - 4 y - 5 z^2 + 2 y z^2 + z^4,\ -y + y^2 + z - z^2,\ -3 + x + y + z^2\}$

```
p = 23;
sol = Solve[{polys == 0, Modulus == p}, vars]
Mod[polys /. sol, p]
```

```
{{Modulus → 23, x → 1, y → 1, z → 1}, {Modulus → 23, x → 5, y → 5, z → 19},
 {Modulus → 23, x → 5, y → 19, z → 5}, {Modulus → 23, x → 6, y → 18, z → 18},
 {Modulus → 23, x → 18, y → 6, z → 18}, {Modulus → 23, x → 18, y → 18, z → 6},
 {Modulus → 23, x → 19, y → 5, z → 5}, {Modulus → 23, x → 20, y → 20, z → 20}}
```

```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

```
p = 4;
red = Reduce[polys == 0, vars, Modulus → p]
sol = {red // ToRules}
Mod[polys /. sol, p]
```

```
(x == 1 && y == 1 && z == 1) || (x == 3 && y == 3 && z == 3)
```

```
{{x → 1, y → 1, z → 1}, {x → 3, y → 3, z → 3}}
```

```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Differenzialgleichungen

DSolve: y versus y[x]

Differentialgleichungen können mit y[x] oder y als zweitem Parameter angeschrieben werden.

```
eqn = y'[x] + y[x] == 1;
```

```
sol1 = DSolve[eqn, y[x], x]
```

{{y[x] → 1 + e^{-x} C[1]}}

```
sol2 = DSolve[eqn, y, x]
```

{{y → Function[{x}, 1 + e^{-x} C[1]]}}

Die zweite Form ist für die weitere Verarbeitung besser geeignet.

```
y'[x] /. sol1
```

{y′[x]}

```
y'[x] /. sol2
```

{−e^{-x} C[1]}

```
y[t - 2] /. sol2
```

{1 + e^{2-t} C[1]}

Zwei Beispiele

Beispiel 1: Freier Fall

Freier Fall aus 10 m Höhe mit Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s.

Der Ansatz

```
ClearAll["Global`*"];
dgl = m z''[t] == -m g;
```

```
lsg = DSolve[{dgl, z[0] == 10, z'[0] == 0}, z, t]
```

$\left\{\left\{z \to \text{Function}\left[\{t\}, \frac{1}{2}\left(20 - g\,t^2\right)\right]\right\}\right\}$

Die Lösungsfunktion z=z[t]

```
z[t] /. lsg
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(20 - g\,t^2\right)\right\}$$

Die Geschwindigkeit wächst linear.

```
z'[t] /. lsg
```

$\{-g\,t\}$

Die Probe

```
{dgl, z[0], z'[0]} /. lsg
```

```
{{True, 10, 0}}
```

Bestimmung des Aufschlagzeitpunkts

```
tlsg = Solve[z[t] == 0 /. lsg, t]
```

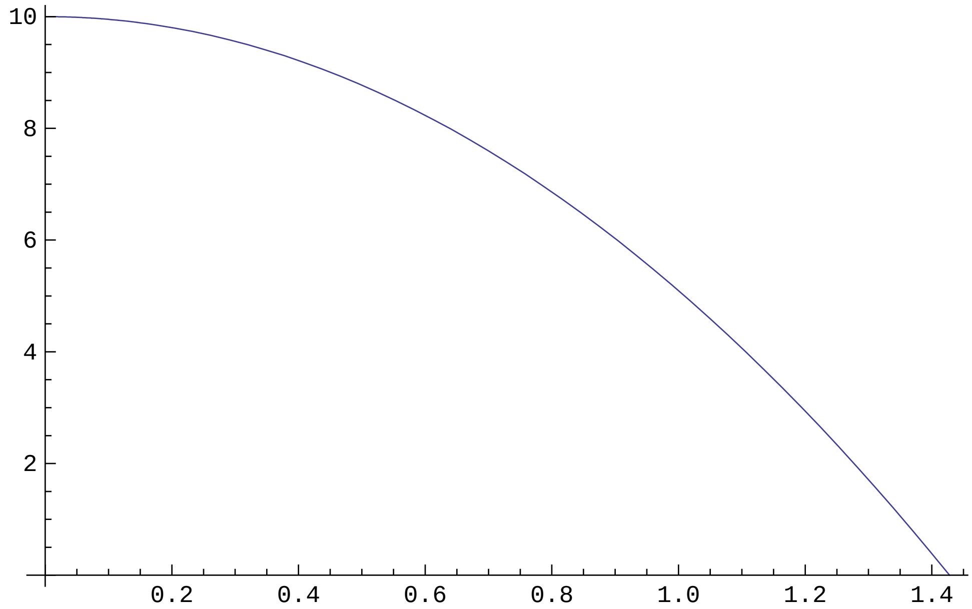
$$\left\{\left\{t \to -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{g}}\right\}, \left\{t \to \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{g}}\right\}\right\}$$

```
t0 = t /. tlsg[[2]] /. g → 9.81
```

```
1.42784
```

Die Kurve des raum−zeitlichen Verlaufs des Experiments

```
Plot[z[t] /. lsg /. g → 9.81, {t, 0, t0}]
```



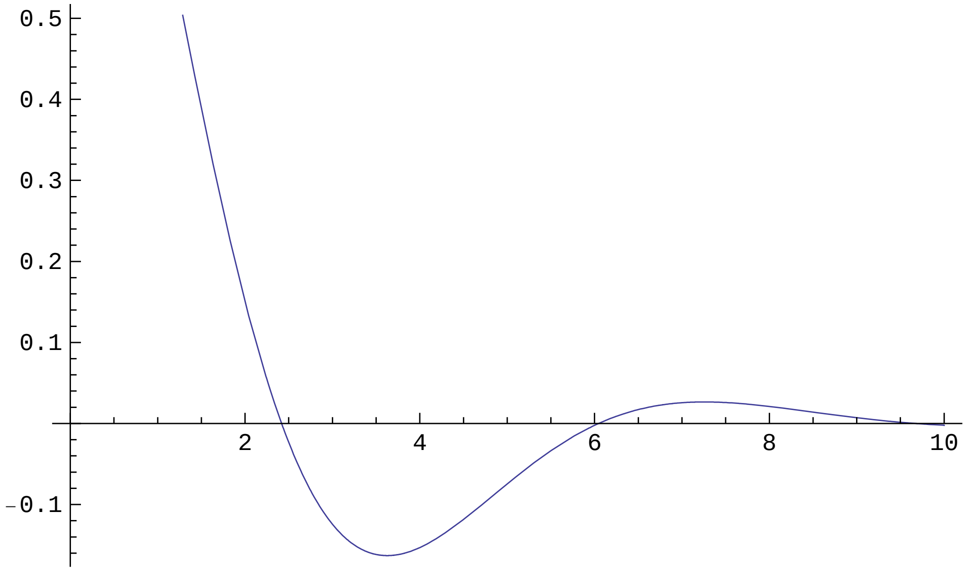
Beispiel 2: Gedämpfte Schwingung

m	Masse
c	Federkonstante
k	Reibungskoeffizient

```
ClearAll["Global`*"];
m = 1; c = 1; k = 1;
lsg = DSolve[ {m y''[t] + c y'[t] + k y[t] == 0,
        y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, t]
```

$$\left\{\left\{y \to \text{Function}\left[\{t\}, \frac{1}{3} e^{-t/2} \left(3 \,\text{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, t}{2}\right] + \sqrt{3}\, \text{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\, t}{2}\right]\right)\right]\right\}\right\}$$

```
Plot[y[t] /. lsg, {t, 0, 10}]
```



Randbedingungen und Integrationskonstanten

```
eqn = y'[x] + y[x] == 1;
```

```
y[x] /. DSolve[eqn && y[0] == 2, y, x]
```

$\{e^{-x}\,(1 + e^{x})\}$

```
sol = DSolve[eqn, y, x]
```

{{y → Function[{x}, 1 + e^{-x} C[1]]}}

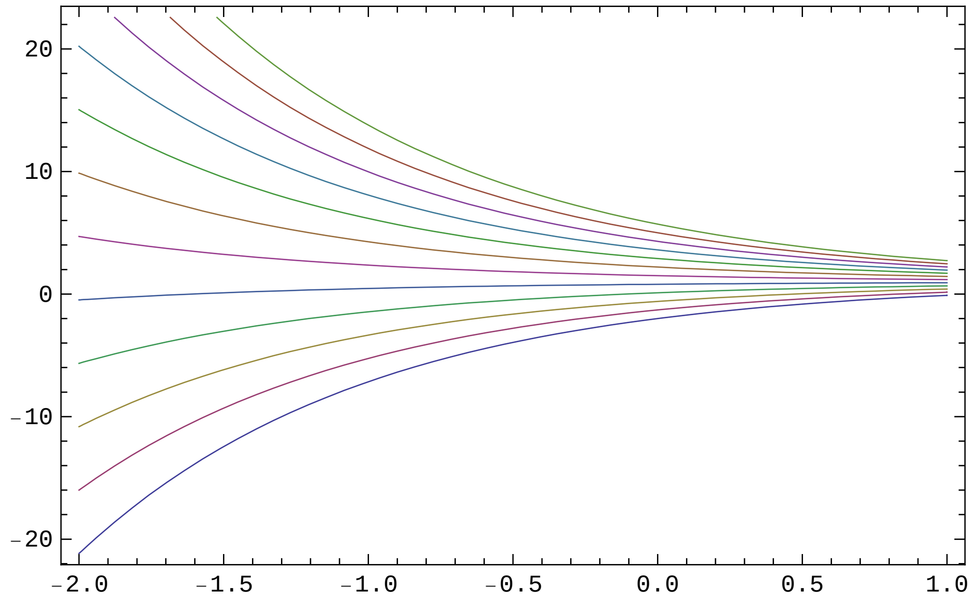
```
DSolve[eqn, y, x, GeneratedParameters → U]
```

{{y → Function[{x}, 1 + e^{-x} U[1]]}}

```
DSolve[eqn, y, x, GeneratedParameters → (Module[{C}, C] &)]
```

{{y → Function[{x}, 1 + C$119632 e^{-x}]}}

```
u = Table[y[x] /. sol /. C[1] -> i, {i, -3, 5, .7}];
Plot[u, {x, -2, 1}, Frame -> True, Axes -> None]
```



Verwechseln Sie in der Notation nicht = (Set) und == (Equal). Bei Funktionsausdrücken ist das besonders lästig.

```
DSolve[{y'[x] + 2 x y[x] == 4 x, y'[1] = 0}, y[x], x]
```

```
DSolve::deqn :
 Equation or list of equations expected instead of 0 in the
   first argument {2 x y[x] + y'[x] == 4 x, 0}.
```

```
DSolve[{2 x y[x] + y'[x] == 4 x, 0}, y[x], x]
```

Einfaches Korrigieren der Eingabe hilft nicht, da y'[x] ja nun durch 0 ersetzt wird.

```
DSolve[{y'[x] + 2 x y[x] == 4 x, y'[1] == 0}, y[x], x]
```

```
DSolve::deqn :
 Equation or list of equations expected instead of True in
   the first argument {2 x y[x] + y'[x] == 4 x, True}.
```

```
DSolve[{2 x y[x] + y'[x] == 4 x, True}, y[x], x]
```

Unset löscht die Zuweisung.

```
Unset[y'[1]]
DSolve[{y'[x] + 2 x y[x] == 4 x, y'[1] == 0}, y[x], x]
```

```
{{y[x] → 2}}
```

DSolve im Einsatz

Eine Testfunktion zum Ausgeben und Prüfen des Ergebnisses, mal als CompoundExpression.

```
test[eqn_] := (
  sol = DSolve[eqn, y, x] // Simplify;
  Print[eqn /. sol // Simplify];
  y[x] /. sol // Simplify)
```

Lineare homogene DGl. mit konstanten Koeffizienten

```
eqn = y'''[x] - 7 y'[x] + 6 y[x] == 0;
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{e^{-3x} C[1] + e^{x} C[2] + e^{2x} C[3]\right\}$$

Ähnliche Gleichung, aber mit einem Störterm

```
eqn = y''[x] - 3 y'[x] + 2 y[x] == E^x;
test[eqn]
```

{True}

$$\{e^{x} (-1 - x + C[1] + e^{x} C[2])\}$$

Lineare DGl. erster Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten

```
eqn = y'[x] + 2 x y[x] == 4 x;
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{2 + e^{-x^2} C[1]\right\}$$

Bernoullische DGL: Das sind DGL der Form $y'[x] = A[x]\, y[x] + B[x]\, y[x]^a$, die mit der Substitution $z = y^{1-a}$ in eine lineare DGL überführt werden können.

```
eqn = 3 y'[x] + y[x] (1 + (2 x - 1) y[x]^3) == 0;
test[eqn]
```

{True, True, True}

$$\left\{-\frac{1}{(1 + 2x - e^{x} C[1])^{1/3}}, \frac{(-1)^{1/3}}{(1 + 2x - e^{x} C[1])^{1/3}}, -\frac{(-1)^{2/3}}{(1 + 2x - e^{x} C[1])^{1/3}}\right\}$$

Riccatische DGL: Das sind DGL der Form `y'[x] = A[x] y[x] + B[x] y[x]^2 + C[y]`.

Ist eine spezielle Lösung bekannt, so kann eine solche Gleichung in eine lineare DGL überführt werden.

```
eqn = y'[x] == y[x]^2 - (2 x + 1) y[x] + x^2 + x + 1;
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{x + \frac{1}{1 + e^{x}\, C[1]}\right\}$$

Dabei können sich Integrale ergeben, die keine elementaren Stammfunktionen haben.

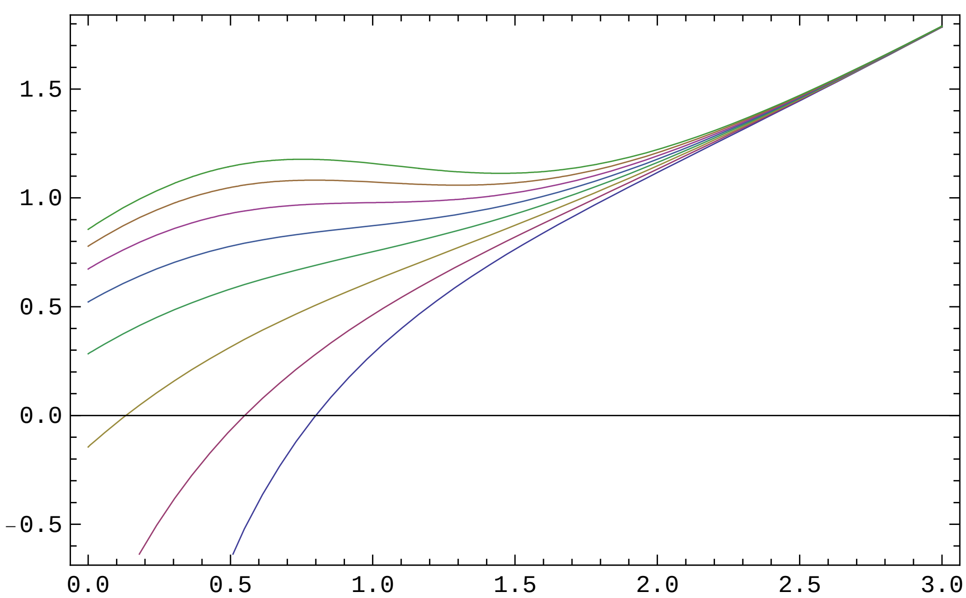
```
eqn = y'[x] == y[x]^2 - (2 x + 1) y[x] + x^2 + 1;
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{\left((1+2x)\,\mathrm{AiryBi}\left[\frac{1}{4}+x\right] - 2\,\mathrm{AiryBiPrime}\left[\frac{1}{4}+x\right] + \left((1+2x)\,\mathrm{AiryAi}\left[\frac{1}{4}+x\right] - 2\,\mathrm{AiryAiPrime}\left[\frac{1}{4}+x\right]\right) C[1]\right) \Big/ \left(2\left(\mathrm{AiryBi}\left[\frac{1}{4}+x\right] + \mathrm{AiryAi}\left[\frac{1}{4}+x\right] C[1]\right)\right)\right\}$$

Und hier noch ein Bild verschiedener dieser Lösungstrajektorien:

```
u = Table[y[x] /. sol /. C[1] → i, {i, -2, 5}];
Plot[u, {x, 0, 3}, Frame → True]
```



Auch wesentlich nichtlineare Gleichungen wie dieser hier, wo y' im Quadrat vorkommt, kann *Mathematica* lösen.

$$\text{eqn} = y'[x]^2 + \frac{1}{2}\,x\,y'[x] - \frac{y[x]}{2} == 0;$$

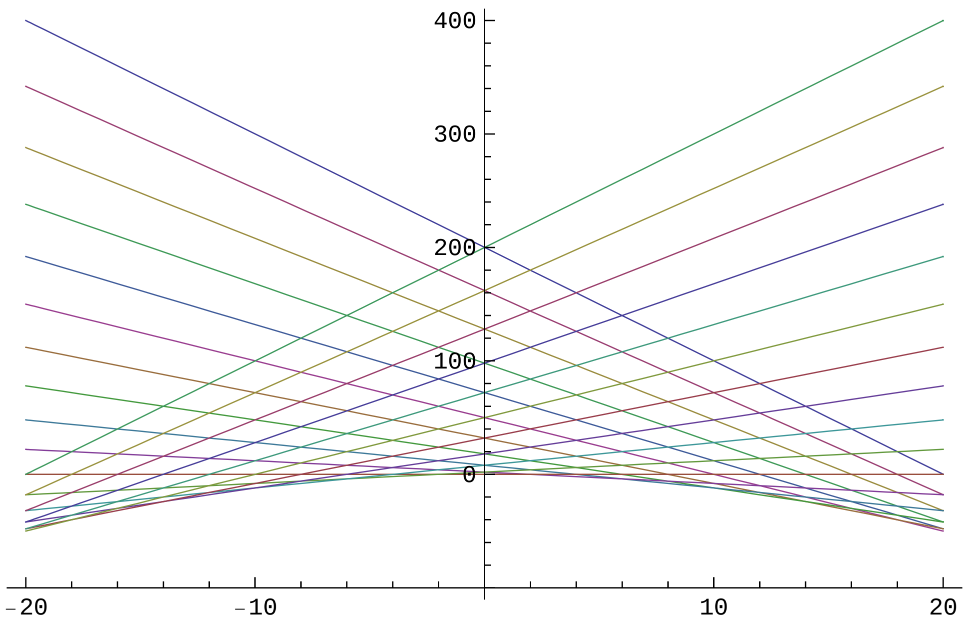
```
test[eqn]
```

{True}

{C[1] (x + 2 C[1])}

Am Bild der Lösungsschar erkennen wir, dass es eine Einhüllende gibt, die ebenfalls Lösung der Gleichung **eqn** ist.

```
u = Table[y[x] /. sol /. C[1] → i, {i, -10, 10}];
Plot[u, {x, -20, 20}, AxesOrigin -> {0, -100}]
```



Da es sich offensichtlich um eine Parabel handelt, können wir die entsprechende Lösung durch einen Ansatz $f = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$ mit unbestimmten Koeffizienten finden. Die Zusatzbedingung $a_2 \neq 0$ schließt uninteressante Lösungen aus.

```
f = a2 x^2 + a1 x + a0;
sys = First[eqn] /. {y[x] → f, y'[x] → D[f, x]}
```

$$\frac{1}{2}\,x\,(a_1 + 2\,x\,a_2) + (a_1 + 2\,x\,a_2)^2 + \frac{1}{2}\left(-a_0 - x\,a_1 - x^2\,a_2\right)$$

```
sol = Solve[CoefficientList[sys, x] == 0 && a2 ≠ 0]
```

$$\left\{\left\{a_0 \to 0,\ a_2 \to -\frac{1}{8},\ a_1 \to 0\right\}\right\}$$

```
f /. sol
```

$\left\{-\frac{x^2}{8}\right\}$

Aber selbst bei Angabe der entsprechenden Anfangsbedingung wird diese spezielle Lösung nicht gefunden.

```
DSolve[eqn && y[0] == 0, y[x], x]
```

{{y[x] → 0}}

Dasselbe gilt für dieses Beispiel, wo Einhüllende sogar die konstanten Funktionen y[x]=±1 sind.

```
eqn = x y'[x]^2 + y[x]^2 - 1 == 0;
sol = DSolve[eqn, y[x], x] // Simplify
```

$\{\{y[x] \to \mathrm{Cos}[2\sqrt{x} + i\, C[1]]\}, \{y[x] \to \mathrm{Cos}[2\sqrt{x} - i\, C[1]]\}\}$

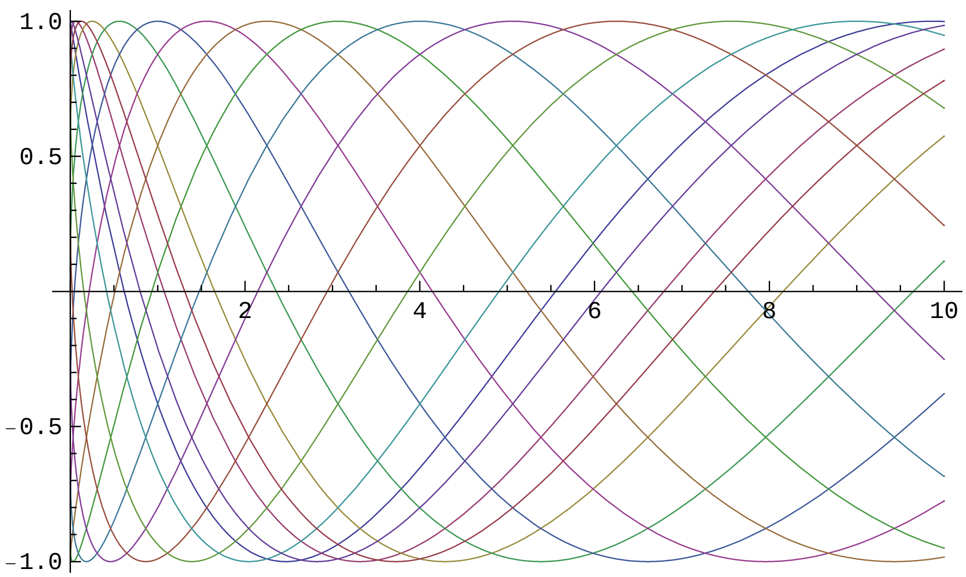
```
DSolve[eqn && y[0] == 1, y[x], x] // Simplify
```

```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.

Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.
```

$\{\{y[x] \to \mathrm{Cos}[2\sqrt{x}]\}\}$

```
u = Table[y[x] /. sol[[1]] /. C[1] → ⅈ i, {i, 0, 7, .5}];
Plot[u, {x, 0, 10}]
```



DSolve und InverseFunction

Die Funktion **test** aus dem vorherigen Abschnitt.

```
test[eqn_] := (
  sol = DSolve[eqn, y, x] // Simplify;
  Print[eqn /. sol // Simplify];
  y[x] /. sol // Simplify)
```

```
eqn = x y[x] (y[x] y'[x] + x) + x^2 - y[x]^2 y'[x] == 0;
u = test[eqn] // Simplify
```

```
Solve::tdep :
 The equations appear to involve the variables to be solved
   for in an essentially non-algebraic way.
```

```
{True}
```

$$\left\{\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right]\left[\frac{1}{2}\left(3-2\,x-x^2+2\,C[1]-2\,\text{Log}[-1+x]\right)\right]\right\}$$

Sieht ganz nett aus; leider lassen sich von dieser **InverseFunction** keine numerischen Approximationen berechnen. y_0 ist die allgemeine Lösung von eqn als Funktion mit symbolischem Parameter C[1]

```
y0[x_] = y[x] /. First[sol] // Simplify
```

$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right]\left[\frac{1}{2}\left(3-2\,x-x^2+2\,C[1]-2\,\text{Log}[-1+x]\right)\right]$$

```
y0[1]
```

$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][\infty]$$

```
y1[x_] = y0[x] /. C[1] → 0
```

$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right]\left[\frac{1}{2}\left(3-2\,x-x^2-2\,\text{Log}[-1+x]\right)\right]$$

```
Table[y1[x], {x, 1.1, 3, 0.3}] // N
```

$$\{\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][2.09759],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][0.0362907],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][-1.28833],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][-2.5],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][-3.70736],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][-4.95],$$
$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right][-6.24685]\}$$

Auch Lösungen mit konkreten Anfangswert y[0]=4 werden nicht gefunden, ...

```
DSolve[eqn && y[0] == 4, y, x]
```

```
Solve::tdep :
 The equations appear to involve the variables to be solved
   for in an essentially non-algebraic way.

DSolve::bvnul :
 For some branches of the general solution, the given boundary
   conditions lead to an empty solution.

{}
```

... obwohl es solche Funktionen in der Lösungsschar $y_0$gibt:

```
u = y0[0]
Solve[u == 4, C[1]]
Reduce[u == 4, C[1]]
Solve[u[[0, 1]][4] == u[[1]], C[1]]
```

$$\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right]\left[\frac{1}{2}\,(3-2\,i\,\pi+2\,C[1])\right]$$

```
{}

Reduce::nsmet :
 This system cannot be solved with the methods available to Reduce.
```

$$\text{Reduce}\left[\text{InverseFunction}\left[\text{Log}[1+\#1]-2\,(1+\#1)+\frac{1}{2}\,(1+\#1)^2\,\&\right]\left[\frac{1}{2}\,(3-2\,i\,\pi+2\,C[1])\right]==4,\ C[1]\right]$$

$$\{\{C[1]\to 1+i\,\pi+\text{Log}[5]\}\}$$

Hinter der Formel für $y_0[x]$ verbirgt sich eigentlich die implizite Lösung $\mathrm{Log}[y+1]-2(1+y)+\frac{(1+y)^2}{2}=\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}-\mathrm{Log}[x-1]-C$.
Die lässt sich mit einigen Verrenkungen aus der Standardlösung extrahieren:

```
u = y0[x]; sol1 = u[[0, 1]][y[x]] == u[[1]] // Expand
```

$$-\frac{3}{2}+\mathrm{Log}[1+y[x]]-y[x]+\frac{y[x]^2}{2}=\frac{3}{2}-x-\frac{x^2}{2}+C[1]-\mathrm{Log}[-1+x]$$

Hier so etwas wie eine Probe. Ableiten führt auf die Ausgangs−DGL zurück.

```
D[sol1, x] // Simplify
```

$$\frac{y[x]^2\, y'[x]}{1+y[x]}=\frac{x^2}{1-x}$$

```
Solve[D[sol1, x], y'[x]]
```

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{x^2\,(1+y[x])}{(-1+x)\,y[x]^2}\right\}\right\}$$

```
Solve[eqn, y'[x]]
```

$$\left\{\left\{y'[x]\to\frac{-x^2-x^2\,y[x]}{(-1+x)\,y[x]^2}\right\}\right\}$$

InverseFunction wird allerdings nicht in allen Fällen eingesetzt, wo dies möglich wäre. Bei der folgenden Dgl. etwa wird die Lösung trotz separierter Variablen gleich als **Solve**−Ausdruck zurückgegeben.

$$\mathrm{eqn}=y'[x]==\frac{y[x]}{y[x]\,\mathrm{Log}[y[x]]+x};$$

```
DSolve[eqn, y, x]
```

```
Solve::tdep :
 The equations appear to involve the variables to be solved
   for in an essentially non−algebraic way.
```

$$\mathrm{Solve}\left[x==C[1]\,y[x]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}[y[x]]^2\,y[x],\ y[x]\right]$$

■ Systeme von Differentialgleichungen

DGL−System, das die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn beschreibt.

```
sol = DSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -x[t],
        x[0] == 1, y'[1] == 2}, {x, y}, t]
```

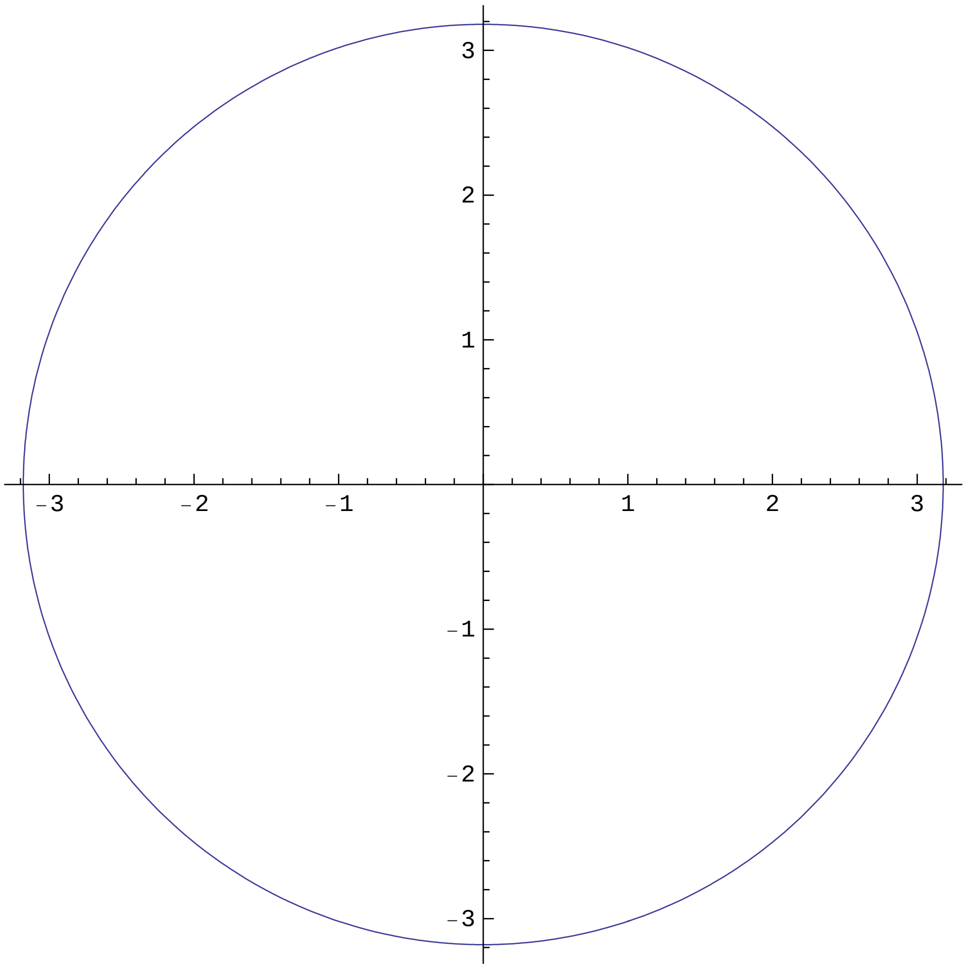
```
{{x → Function[{t}, Cos[t] - Cot[1] Sin[t] - 2 Csc[1] Sin[t]],
  y → Function[{t}, -Cos[t] Cot[1] - 2 Cos[t] Csc[1] - Sin[t]]}}
```

Anlegen eines Vektors *r* mit den Koordinaten des Punkts in Abhängigkeit von *t*.

```
r[t_] = {x[t], y[t]} /. sol[[1]] // Simplify
```

```
{Cos[t] - (2 + Cos[1]) Csc[1] Sin[t], -(Cos[1 - t] + 2 Cos[t]) Csc[1]}
```

```
ParametricPlot[r[t], {t, 0, 2 π}]
```



Dieses System schafft *Mathematica* 6 zwar, aber das Ergebnis in seiner symbolischen Form nützt nur Spezialisten, die etwas von Jacobi−Funktionen verstehen.

```
eqn = {x'[t] == 3 y[t] z[t], y'[t] == 3 x[t] z[t], z'[t] == -x[t] y[t]}
```

```
{x'[t] == 3 y[t] z[t], y'[t] == 3 x[t] z[t], z'[t] == -x[t] y[t]}
```

```
sol = DSolve[eqn, {x, y, z}, t]
```

```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.
```

```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.

Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may
   not be found; use Reduce for complete solution information.

General::stop : Further output of
   Solve::ifun will be suppressed during this calculation.
```

$$\Big\{\Big\{x \to \text{Function}\Big[\{t\}, -i\sqrt{2}\sqrt{C[1]}\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]\Big],$$

$$y \to \text{Function}\Big[\{t\},$$

$$-\sqrt{2\,C[1] - 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}\ \Big], z \to$$

$$\text{Function}\Big[\{t\},$$

$$-\frac{\sqrt{6\,C[2] + 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}}{\sqrt{3}}\Big]\Big\},$$

$$\Big\{x \to \text{Function}\Big[\{t\}, -i\sqrt{2}\sqrt{C[1]}\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]\Big],$$

$$y \to \text{Function}\Big[\{t\},$$

$$\sqrt{2\,C[1] - 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}\ \Big], z \to$$

$$\text{Function}\Big[\{t\},$$

$$\frac{\sqrt{6\,C[2] + 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\left(\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - \sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3]\right), -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}}{\sqrt{3}}\Big]\Big\},$$

$$\Big\{x \to \text{Function}\Big[\{t\}, i\sqrt{2}\sqrt{C[1]}\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - 3\,i\sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3], -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]\Big],$$

$$y \to \text{Function}\Big[\{t\},$$

$$-\sqrt{2\,C[1] - 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - 3\,i\sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3], -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}\ \Big], z \to$$

$$\text{Function}\Big[\{t\},$$

$$\frac{\sqrt{6\,C[2] + 2\,C[1]\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - 3\,i\sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3], -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}}{\sqrt{3}}\Big]\Big\},$$

$$\Big\{x \to \text{Function}\Big[\{t\}, i\sqrt{2}\sqrt{C[1]}\ \text{JacobiSN}\Big[3\,i\sqrt{2}\ t\sqrt{C[2]} - 3\,i\sqrt{2}\sqrt{C[2]}\ C[3], -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]\Big],$$

$$y \to \text{Function}\Big[\{t\},\ \sqrt{2\,C[1] - 2\,C[1]\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,t\,\sqrt{C[2]} - 3\,i\,\sqrt{2}\,\sqrt{C[2]}\,C[3],\ -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}\Big],\ z \to \text{Function}\Big[\{t\},\ -\frac{\sqrt{6\,C[2] + 2\,C[1]\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,t\,\sqrt{C[2]} - 3\,i\,\sqrt{2}\,\sqrt{C[2]}\,C[3],\ -\frac{C[1]}{3\,C[2]}\Big]^2}}{\sqrt{3}}\Big]\}\}$$

Aber dieses Ergebnis kann weiter numerisch oder grafisch ausgewertet werden.

Der Plot verschiedener Bahnkurven kann wieder mit **ParametricPlot3D** erfolgen, was einige Geduld abverlangt.

Stattdessen wollen wir einen anderen Weg gehen und erzeugen uns selbst eine solche Graphik aus Grafikprimitiven.

Dazu definieren wir zunächst eine Funktion r[t,a], welche für verschiedene $a > 0$ die Punkte auf der jeweiligen Bahnkurve mit dem Parameter (a^2,a^2,a^2) berechnet.

```
r[t_, a_] = Simplify[{x[t], y[t], z[t]} /. sol[[1]] /. {C[1] → a^2, C[2] → a^2, C[3] → a^2}, a > 0]
```

$$\Big\{-i\,\sqrt{2}\,a\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big],\ -a\,\sqrt{2 - 2\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big]^2},\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\,a\,\sqrt{3 + \text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big]^2}\Big\}$$

Als nächstes compilieren wir diese Funktion, um sie schneller numerisch auswerten zu können.

```
r1 = Compile[{t, a}, r[t, a] // Evaluate]
```

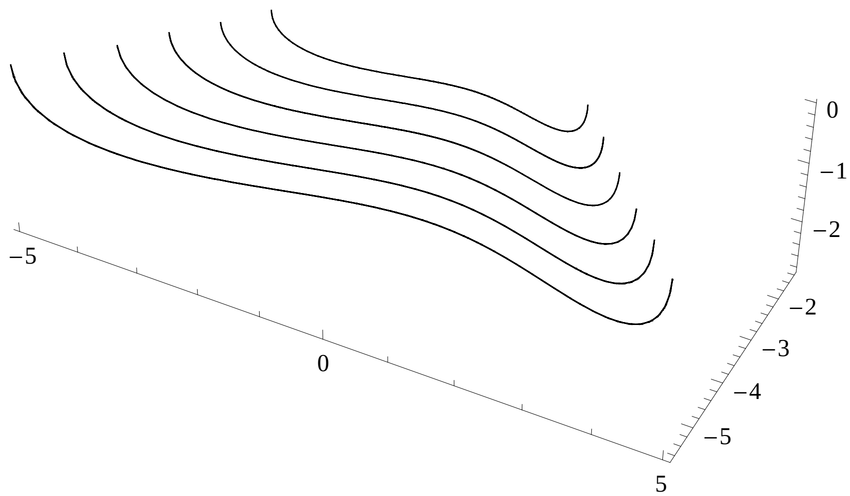
$$\text{CompiledFunction}\Big[\{t, a\},\ \Big\{-i\,\sqrt{2}\,a\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big],\ -a\,\sqrt{2 - 2\,\text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big]^2},\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\,a\,\sqrt{3 + \text{JacobiSN}\Big[3\,i\,\sqrt{2}\,a\,(-a^2+t),\ -\frac{1}{3}\Big]^2}\Big\},\ -\text{CompiledCode}-\Big]$$

Und nun erzeugen wir daraus eine Liste von Listen für verschiedene positive Werte des Bahnparameters *a*.

```
pts = Table[r1[t, a] // Chop, {a, 1, 2, 0.2}, {t, 0, 2, 0.01}];
```

Die Punkte jeder Liste werden dem Grafikprimitiv **Line** übergeben, welches den Linienzug erzeugt, welcher diese Punkte verbindet. Wir erkennen im folgenden Bild die sechs zugehörigen Bahnkurven.

```
Show[Graphics3D[Line[#] & /@ pts], Boxed → False, Axes → True]
```



Diese Bahnkurven werden allerdings mehrfach und mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen.

Mit etwas mehr Mühe und Liebe zum Detail lässt sich das in einer Animation darstellen.

```
Animate[Show[Graphics3D[{PointSize[0.03],
    Table[{Hue[2 u - 0.35], Point[r1[t, u]] // Chop}, {u, 0.2, 0.7, 0.1}]}],
  PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 2}}, Boxed → False, Axes → True],
 {t, 0, 15, .01}, DefaultDuration → 100]
```

Weitere Beispiele

Lineare homogene Differentialgleichungen

$$eqn = y''[x] + \frac{y'[x]}{4} - \frac{3\,y[x]}{8} == 0;$$

```
test[eqn]
```

```
{True}
```

$$\left\{e^{-3x/4}\left(C[1] + e^{5x/4}\,C[2]\right)\right\}$$

```
eqn = y''''[x] - y[x] == 0;
test[eqn]
```

```
{True}
```

$$\{e^{x}\,C[1] + e^{-x}\,C[3] + C[2]\,Cos[x] + C[4]\,Sin[x]\}$$

Lineare inhomogene Differentialgleichungen

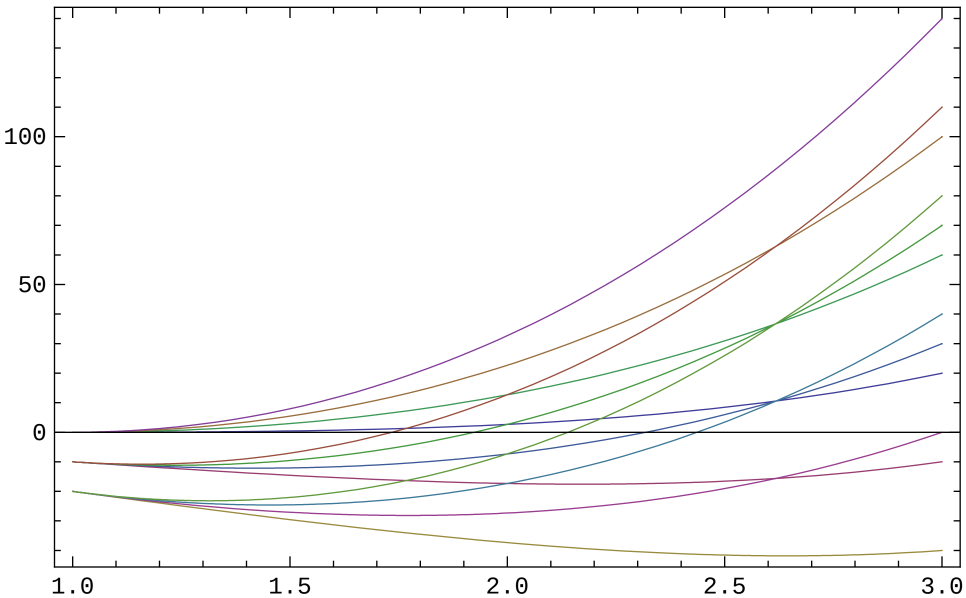
$$\mathbf{eqn = y''[x] + \frac{2\,x}{1 - x^2}\,y'[x] - \frac{2}{1 - x^2}\,y[x] == 2\,(x^2 - 1);}$$

```
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{\frac{1}{3}\,x\,(2 - 3\,x + x^3) + \frac{(-1 + x)^{3/2}\,\sqrt{-1 + x^2}\;C[1]}{\sqrt{1 + x}} - \frac{x\,\sqrt{-1 + x^2}\;C[2]}{\sqrt{-1 + x}\;\sqrt{1 + x}}\right\}$$

```
u = Table[y[x] /. First[sol] /. {C[1] -> 10 i, C[2] -> 10 j}, {i, 0, 3}, {j, 0, 2}];
Plot[u, {x, 1, 3}, Frame → True]
```



$$\mathbf{eqn = y''[x] + m^2\,y[x] == 2\,Cos[m\,x] + 3\,Sin[m\,x];}$$

```
test[eqn]
```

{True}

$$\left\{\left(1 - \frac{3\,x}{2} + C[1]\right) Cos[x] + (x + C[2])\;Sin[x]\right\}$$

```
y0 = y[x] /. First[sol]
```

$$C[1]\;Cos[x] + C[2]\;Sin[x] + \frac{1}{4}\left(-6\,x\,Cos[x] + 4\,Cos[x]^3 + 4\,x\,Sin[x] - 6\,Cos[x]^2\,Sin[x] + 3\,Cos[x]\;Sin[2\,x] + 2\,Sin[x]\;Sin[2\,x]\right)$$

```
TrigExpand[y0]
```

$$Cos[x] - \frac{3}{2}\,x\,Cos[x] + C[1]\;Cos[x] + x\,Sin[x] + C[2]\;Sin[x]$$

```
Collect[%, {Sin[m x], Cos[m x]}]
```

$$\left(1 - \frac{3\,x}{2} + C[1]\right) \mathrm{Cos}[x] + (x + C[2])\,\mathrm{Sin}[x]$$