# *Mathematica* nutzen

## ■ *Mathematica* als Taschenrechner für Zahlen

*Mathematica* führt (jenseits numerischer Näherungen) grundsätzlich alle Rechungen exakt aus und verwendet dazu eine BigInteger−Arithmetik.

```
1.23 + 2.25
```

```
3.48
```

```
12 + 23
```

```
35
```

$$2^{100}$$

```
1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376
```

```
10 !
```

```
3 628 800
```

*Mathematica* kennt eine große Zahl zahlentheoretischer Funktionen.

$$\mathtt{GCD}\left[2^{30} - 1,\ 3^{20} - 1\right]$$

```
11
```

```
FactorInteger[12 ! + 1]
```

```
{{13, 2}, {2 834 329, 1}}
```

```
PrimeQ[12 ! - 1]
```

```
True
```

Auch mit rationalen Zahlen wird exakt gerechnet.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{6}$$

```
Sum[1/i, {i, 1, 50}]
```

$$\frac{13\,943\,237\,577\,224\,054\,960\,759}{3\,099\,044\,504\,245\,996\,706\,400}$$

```
N[%]
```

4.49921

Symbolische Ausdrücke wie $\pi$ werden als "Bezeichner mit Eigenschaften" behandelt. Eine Eigenschaft ist oft ein Verfahren zur Berechnung numerischer Näherungen beliebiger Genauigkeit.

```
Pi
```

$\pi$

```
N[%, 30]
```

3.14159265358979323846264338328

```
Sin[π]
```

0

```
Sin[π / 4]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

```
Sin[π / 5]
```

$$\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

Aus numerischen Näherungswerten kann man eine Beziehung wie Sin[$\pi$ ] == 0 *prinzipiell* nicht *exakt* herleiten.

```
p = N[π, 10]; Sin[p]
```

$0. \times 10^{-10}$

*Mathematica* kann natürlich auch mit komplexen Zahlen rechnen. Aus innermathematischen Gründen wird für jede Variable angenommne, dass sie komplexwertig ist, wenn nicht anderes vereinbart ist.

$$\sqrt{-12}$$

$$2\,i\,\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$2\sqrt{2}$$

**z = 1 + 3 I; $z^2$**

$-8+6\,i$

**$\frac{z+1}{z-1}$**

$1-\frac{2\,i}{3}$

**$\left(\sqrt{2}-1\right)+2\left(\sqrt{2}+1\right)$**

$-1+\sqrt{2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)$

**Expand[%]**

$1+3\sqrt{2}$

Für geschachtelte Wurzelausdrücke kennt *Mathematica* manchmal verblüffende Vereinfachungen.

**u1 = $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$**

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

**FullSimplify[u1]**

$1+\sqrt{3}$

**u2 = $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$**

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

**FullSimplify[u2]**

6

An anderen Stellen verhält sich *Mathematica* dagegen sehr eigenwillig.

**u3 = $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$**

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

**FullSimplify[RootReduce[u3]]**

$-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

## ■ *Mathematica* als Taschenrechner für Formeln und symbolische

# Ausdrücke

Komplizierte rationale Ausdrücke lassen sich gelegentlich in eine verblüffend einfache Form bringen.

```
u = a/((a - b) (a - c)) + b/((b - a) (b - c)) + c/((c - a) (c - b))
```

$$\frac{a}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{b}{(-a+b)\,(b-c)}+\frac{c}{(-a+c)\,(-b+c)}$$

```
u // Simplify
```

0

```
u = a^n/((a - b) (a - c)) + b^n/((b - a) (b - c)) + c^n/((c - a) (c - b))
```

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{b^n}{(-a+b)\,(b-c)}+\frac{c^n}{(-a+c)\,(-b+c)}$$

**Simplify** ist dafür nicht immer der rcihtige Operator.

```
sol = Table[u /. n → i // Simplify, {i, 2, 7}]
```

$$\left\{1,\ a+b+c,\ a^2+b^2+b\,c+c^2+a\,(b+c),\ a^3+b^3+b^2\,c+b\,c^2+c^3+a^2\,(b+c)+a\left(b^2+b\,c+c^2\right),\ \frac{a^6}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{\frac{b^6}{-a+b}+\frac{c^6}{a-c}}{b-c},\ \frac{a^7}{(a-b)\,(a-c)}+\frac{\frac{b^7}{-a+b}+\frac{c^7}{a-c}}{b-c}\right\}$$

Das richtige Kommando ist hier **Together**, mit dem der Hauptnenner gebildet und dann Zähler und Nenner vereinfacht wird.

```
u6 = u /. n → 6 // Together
```

$$a^4+a^3\,b+a^2\,b^2+a\,b^3+b^4+a^3\,c+a^2\,b\,c+a\,b^2\,c+b^3\,c+a^2\,c^2+a\,b\,c^2+b^2\,c^2+a\,c^3+b\,c^3+c^4$$

Aber auch das Ergebnis von **Simplify** war richtig, denn für n>5 sind die geschachtelten rationalen Ausdrücke in der Tat "einfacher". *Mathematica* vergleicht dazu die Anzahl derBausteine, aus denen die verschiedenen möglichen Ergebnisse bestehen.

```
LeafCount /@ sol
```

{1, 4, 18, 39, 50, 50}

```
LeafCount[u6]
```

79

## ■ Listen, Matrizen, Substitutionslisten

Listen und Tabellen sind die grundlegende Datenstruktur, in der Aggregationen von symbolischen Ausdrücken verwaltet werden. Hier sehen Sie die wichtigsten Kommandos für Listen in Aktion.

```
ClearAll["Global`*"];
```

```
l = Table[i^2, {i, 1, 5}]
```

```
{1, 4, 9, 16, 25}
```

```
Apply[Plus, l]
```

```
55
```

```
Plus @@ l
```

```
55
```

```
Select[Table[i, {i, 1, 70}], PrimeQ]
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67}
```

```
u = Table[{x, Sin[x]}, {x, 0, 3, 0.1}]
```

```
{{0., 0.}, {0.1, 0.0998334}, {0.2, 0.198669}, {0.3, 0.29552}, {0.4, 0.389418},
 {0.5, 0.479426}, {0.6, 0.564642}, {0.7, 0.644218}, {0.8, 0.717356},
 {0.9, 0.783327}, {1., 0.841471}, {1.1, 0.891207}, {1.2, 0.932039},
 {1.3, 0.963558}, {1.4, 0.98545}, {1.5, 0.997495}, {1.6, 0.999574},
 {1.7, 0.991665}, {1.8, 0.973848}, {1.9, 0.9463}, {2., 0.909297}, {2.1, 0.863209},
 {2.2, 0.808496}, {2.3, 0.745705}, {2.4, 0.675463}, {2.5, 0.598472},
 {2.6, 0.515501}, {2.7, 0.42738}, {2.8, 0.334988}, {2.9, 0.239249}, {3., 0.14112}}
```

```
PaddedForm[Grid[u], {1, 4}]
```

```
 0.0000  0.0000
 0.1000  0.1000
 0.2000  0.2000
 0.3000  0.3000
 0.4000  0.4000
 0.5000  0.5000
 0.6000  0.6000
 0.7000  0.6000
 0.8000  0.7000
 0.9000  0.8000
 1.0000  0.8000
 1.0000  0.9000
 1.0000  0.9000
 1.0000  1.0000
 1.0000  1.0000
 2.0000  1.0000
 2.0000  1.0000
 2.0000  1.0000
 2.0000  1.0000
 2.0000  0.9000
 2.0000  0.9000
 2.0000  0.9000
 2.0000  0.8000
 2.0000  0.7000
 2.0000  0.7000
 3.0000  0.6000
 3.0000  0.5000
 3.0000  0.4000
 3.0000  0.3000
 3.0000  0.2000
 3.0000  0.1000
```

Auch Vektoren und Matrizen werden intern als Listen dargestellt. Die gewohnte mathematische Notation kann mit verschiedenen *Form−Kommandos hergestellt werden.

**mat** = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{pmatrix}$

```
{{a, b, c}, {d, e, f}}
```

```
mat // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

```
Transpose[mat] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Die Lösung von Gleichungssystemen wird als **Substitutionsliste** zurückgegeben. Zusammen mit dem Substitutionsoperator ***/.*** ist eine solche Form für die weitere Verarbeitung besonders gut geeignet.

```
sys = {x^2 + y - 2 == 0, 3 x - y^2 - 2 == 0};
sol = Solve[sys, {x, y}]
```

$$\left\{\{x \to 1, y \to 1\}, \{x \to 2, y \to -2\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right), y \to \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right), y \to \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

```
{x, y} /. sol
```

$$\left\{\{1, 1\}, \{2, -2\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{2}\left(-3 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

```
x^2 + y^2 /. sol // Expand
```

{2, 8, -5, -5}

```
sys /. sol // Expand
```

{{True, True}, {True, True}, {True, True}, {True, True}}

Dabei wird vom Attribut Listable von /. (der InfixForm von ReplaceAll) Gebrauch gemacht, das als Anwendung einer Liste von Substitutionen auf einen Ausdruck eine Liste von Ergebnissen zurückgibt. In Wirklichkeit kommt **Map[sys /. # & , sol]** oder kurz

```
(sys /. # &) /@ sol
```

$$\left\{\{True, True\}, \{True, True\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - 3 i\sqrt{3}\right) == 0, True\right\}, \left\{-2 + \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + 3 i\sqrt{3}\right) == 0, True\right\}\right\}$$

zum Einsatz.

In Versionen < 6 wurden an dieser Stelle Warnungen ausgelöst. Diese rührten daher, dass beide Seiten von == numerisch auswertbar (Eigenschaft NumericQ) sind und deshalb zunächst versucht wurde, die Gleichheit durch numerische Näherung zu falsifizieren. Erst danach bekam Simplify das Kommando. Dieser Zugang ist hier natürlich zwecklos und wurde mit Version 6 geändert.

Mit dem folgenden komplexen Kommando (können Sie es dechiffrieren?) wird gezeigt, dass alle linken Seiten in der Probe tatsächlich die Eigenschaft NumericQ haben.

```
(NumericQ /@ #) & /@ (First /@ sys /. sol)
```

{{True, True}, {True, True}, {True, True}, {True, True}}

## ■ *Mathematica* als mathematisches Expertensystem

*Mathematica* kennt mathematisch−algorithmische Verfahren aus vielen Gebieten der Mathematik.

```
ClearAll["Global`*"]
```

$\partial_x x^n$

$n\, x^{-1+n}$

$$\partial_{x,x}\left(x^2\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Log}[x]\right)$$

$$2\,x\,\mathrm{Cos}[x] + 4\,x\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Log}[x] + 3\,\mathrm{Sin}[x] + 2\,\mathrm{Log}[x]\,\mathrm{Sin}[x] - x^2\,\mathrm{Log}[x]\,\mathrm{Sin}[x]$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}[-1+x] + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}[1+x]$$

$$\int \frac{1}{1-x^5}\,dx$$

$$\frac{1}{20}\left(2\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\;\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1-\sqrt{5}+4\,x}{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}\right] + 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\;\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1+\sqrt{5}+4\,x}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right] - 4\,\mathrm{Log}[-1+x] - \left(-1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Log}\left[1-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)x+x^2\right] + \left(1+\sqrt{5}\right)\mathrm{Log}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)x+x^2\right]\right)$$

Manchmal stimmt die Form des Ergebnisses aber nicht mit den Erwartungen überein. Die Gleichwertigkeit von Ergebnissen zu prüfen oder gar *Mathematica* zu "überreden", ein Ergebnis in einer bestimmten Form zurückzugeben, ist eine hohe Kunst und bedarf oft genauerer Kenntnisse über Interna der Darstellung und Rechnungen.

Hier etwa kommen komplexwertige Argumente an einer Stelle vor, wo sie gar nicht erforderlich sind.

$$p = \frac{2\,x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 2}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\frac{-2 + 2\,x + 2\,x^2 + 2\,x^3}{1 + x^2 + x^4}$$

$$\int p\,dx$$

$$\frac{1}{6}\left(3\sqrt{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{3/2}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\left(-i+\sqrt{3}\right)x\right] + 3\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3/2}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{3}\right)x\right] - 2\sqrt{3}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{3}}{1+2\,x^2}\right] + 3\,\mathrm{Log}\left[1+x^2+x^4\right]\right)$$

**p1 = p // Apart**

$$\frac{-1+3\,x}{1-x+x^2} + \frac{-1-x}{1+x+x^2}$$

Eine solche Zerlegung half noch bei *Mathematica* 4.1, eine Darstellung mit reellwertigen Argumenten zu finden.

$$\int p1\, dx$$

$$\frac{1}{6}\left(3\sqrt{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{3/2}\text{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\left(-i+\sqrt{3}\right)x\right]+3\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3/2}\text{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{3}\right)x\right]-2\sqrt{3}\,\text{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{3}}{1+2x^2}\right]+3\,\text{Log}\left[1+x^2+x^4\right]\right)$$

*Mathematica* 6 findet dasselbe Ergebnis nur, wenn die beiden Summanden wirklich getrennt integriert und dann die Ergebnisse addiert werden. Wir verwenden dabei als Interna, dass **Map** nicht nur für Listen, sondern auch für Summen funktioniert.

```
Map[Integrate[#, x] &, p1]
```

$$\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}}-\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\text{Log}\left[1-x+x^2\right]-\frac{1}{2}\text{Log}\left[1+x+x^2\right]$$

Und hier ein paar Rechnungen aus der Analysis.

$$\int \text{Sin}\left[x^2\right] dx$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{FresnelS}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\right]$$

$$\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[x]\,\text{Tan}[x]}{1-\text{Cos}[x]},\ x\to 0\right]$$

$$2$$

```
Series[Tan[Sin[x]] - Sin[Tan[x]], {x, 0, 10}]
```

$$\frac{x^7}{30}+\frac{29x^9}{756}+O[x]^{11}$$

$$\text{Sum}\left[k^2,\ \{k,\ 0,\ n\}\right]$$

$$\frac{1}{6}n(1+n)(1+2n)$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^3$$

$$\frac{1}{4}n^2(1+n)^2$$

```
Sum[1 / Binomial[2 n, n], {n, 0, ∞}]
```

$$\frac{2}{27}\left(18+\sqrt{3}\,\pi\right)$$

```
Sum[1 / Binomial[2 n, n], {n, 0, k}]
```

$$\frac{2}{27}\left(18+\sqrt{3}\,\pi\right)-\frac{4^{-1-k}\sqrt{\pi}\,\text{Gamma}[2+k]\,\text{Hypergeometric2F1}\left[1,2+k,\frac{3}{2}+k,\frac{1}{4}\right]}{\text{Gamma}\left[\frac{3}{2}+k\right]}$$

## Die Notation von *Mathematica*

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
uFactors = FactorInteger[12 ! + 1]
```

{{13, 2}, {2 834 329, 1}}

```
Context[]
```

Global`

```
Context[Tan]
```

System`

```
$ContextPath
```

{PacletManager`, WebServices`, System`, Global`}

```
Expand[(a + b)^2]
```

$a^2+2\,a\,b+b^2$

```
(a + b)^2 // Expand
```

$a^2+2\,a\,b+b^2$

```
lsg = Solve[x^2 - x + 3 == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{11}\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{11}\right)\right\}\right\}$$

```
lsg[[1]]
```

$$\left\{x\to\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{11}\right)\right\}$$

```
Integrate[Sqrt[x], {x, 0, Pi}]
```

$$\frac{2\,\pi^{3/2}}{3}$$

```
Integrate[√x, {x, 0, π}]
```

$$\frac{2\,\pi^{3/2}}{3}$$

```
(* << Calendar` oder *)
Needs["Calendar`"]

EasterSunday /@ (2006 + Range[10])

{{2007, 4, 8}, {2008, 3, 23}, {2009, 4, 12}, {2010, 4, 4}, {2011, 4, 24},
 {2012, 4, 8}, {2013, 3, 31}, {2014, 4, 20}, {2015, 4, 5}, {2016, 3, 27}}
```

Bevor Symbole und Funktionen aus Paketen verwendet werden, muss der entsprechende Namensraum in den **$ContextPath** aufgenommen werden.

Was passiert, wenn obige Funktion aufgerufen wird, aber das Paket nicht geladen wurde?
Probieren wir es aus. Mit **Evaluation | Quit Kernel** starten wir den Kernel neu, was alle bisherigen Setzungen löscht.

```
$ContextPath
EasterSunday[2007]
Names["Global`*"]

{PacletManager`, WebServices`, System`, Global`}

EasterSunday[2007]

{EasterSunday}
```

Beim ersten Aufruf wurde der unausgewertete Funktionsausdruck zurückgegeben. Beim nachträglichen Laden des Pakets **Calendar** wird ein zweiter Bezeichner **EasterSunday** im Kontext **Calendar`** angelegt. Die Warnung weist darauf hin, dass beide Bezeichner denselben unqualifizierten Namen haben.

Seit Version 6 wird beim zweiten Aufruf der zuletzt geladene (und damit gewünschte) Bezeichner verwendet. Mit dem folgenden Kommando können Sie sich überzeugen, dass tatsächlich beide Bezeichner existieren.

```
Needs["Calendar`"]

EasterSunday::shdw : Symbol EasterSunday appears in multiple
   contexts {Calendar`, Global`}; definitions in context
   Calendar` may shadow or be shadowed by other definitions.

$ContextPath
EasterSunday[2007]
Names["*`EasterSunday"]

{Calendar`, PacletManager`, WebServices`, System`, Global`}

{2007, 4, 8}

{EasterSunday, Global`EasterSunday}
```

Mit **Remove** und dem qualifizierten Namen kann der falsche Bezeichner aus der Symboltabelle entfernt werden (bzw. –– in früheren *Mathematica*–Versionen –– **muss** zum ordnungsgemäßen Funktionieren entfernt werden)

```
Remove[Global`EasterSunday]
Names["*`EasterSunday"]

{EasterSunday}
```

```
? Solve
```

Solve[*eqns*, *vars*] attempts to solve an
equation or set of equations for the variables *vars*.
Solve[*eqns*, *vars*, *elims*] attempts to solve the equations
for *vars*, eliminating the variables *elims*.

```
?? Mod
```

Mod[*m*, *n*] gives the remainder on division of m by n.
Mod[*m*, *n*, *d*] uses an offset d.

```
Attributes[Mod] = {Listable, NumericFunction, Protected}
```